

微分積分学 Lecture note

Presented by Minami

<http://ameblo.jp/dwave/>

目次

第 1 章	実数の定義	5
1.1	自然数	5
1.2	整数	6
1.3	有理数	7
1.3.1	有理数の稠密性	8
1.4	無理数と実数	9
1.4.1	有理数直線の穴を埋めよう	10
1.5	数の拡張の「一段落」	11
1.5.1	【余談】無理数の定義と, Dedekind の切断	11
第 2 章	極限, 収束, 発散	13
2.1	数列の極限の定義 (高校レベル)	13
2.2	数列の極限の定義 (ϵ - N 論法)	14
2.2.1	ϵ - N 論法の考え方	14
2.2.2	ϵ - N 論法による数列の収束の定義	15
2.2.3	ϵ - N 論法による数列の発散の定義	17
第 3 章	微分	19
3.1	位置と速度	19
3.2	微分の定義	21
3.3	微分の性質	22
3.3.1	【余談】位置, 速度, 加速度	23
3.4	絶対に覚えておくべき 2 つの微分公式	24
3.4.1	x^n の導関数	24
3.4.2	三角関数の導関数	24
3.5	微分の連鎖法則	25
3.5.1	合成関数	25
3.5.2	微分と微分が手を繋ぐ	26
3.6	逆三角関数	28
3.6.1	逆三角関数の定義	28
3.6.2	ちょっとした制限を加えてみる	29
3.6.3	逆三角関数の導関数	30
3.6.4	【余談】多価関数	31
3.7	指数関数, Napier 数	32

3.7.1	指数関数の底と, $x = 0$ での微分係数	32
3.8	対数関数	34
3.9	極限公式の導出	36
3.9.1	スタートは Napier 数の極限公式 (1)	36
3.9.2	Napier 数の極限公式 (2) の導出	36
3.9.3	Napier 数の極限公式 (3) の導出	37
3.9.4	Napier 数の極限公式 (4) の導出	37
3.10	指数関数, 対数関数の導関数	38
3.10.1	$y = e^x$ の導関数	38
3.10.2	$y = a^x$ の導関数	38
3.10.3	$y = \log x$ の導関数	39
3.10.4	$y = \log_a x$ の導関数	39

第 1 章

実数の定義

微積分学の本格的な参考書を読むと、必ず最初に、実数を定義する章がある。この「実数論」では非常に厳密な議論が要求され、それゆえに非常に分かりにくく、大抵の人はこの実数論の部分で参考書を投げ出してしまふ。そこで、この章では、分かりにくいところは思い切って飛ばして（すなわち、厳密さをあんまり重視せずに）、実数を定義してみよう。もし、分かりにくいのであれば、この章は読み飛ばしちゃっても構わない。

1.1 自然数

私達が日常生活で用いる「普通の数」、すなわち、 $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ を、自然数 (natural number) という。本来であれば、自然数は厳密に定義しなければならない数学的対象であるが、あまり踏み込みすぎると数学基礎論の勉強になってしまうので、ここでは、自然数を直感的に定義し、そこから話を進めて行くことにする。（自然数の厳密な定義に興味がある読者は、Peano の公理でググってみよ。）

definition : 自然数

我々が日常生活で用いる数、すなわち、

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots, n, \dots$$

を、自然数 (natural number) と呼び、自然数全体の集合を \mathbb{N} と表記する。

（ちなみに、自然数に 0 は含まれないので注意せよ）

さて、自然数全体の集合 \mathbb{N} を考えたときに、 \mathbb{N} の中で必ず可能である四則演算は何だろうか。

- 加法 (addition)
- 減法 (subtraction)
- 乗法 (multiplication)
- 除法 (division)

実は、 \mathbb{N} の中で必ず可能である演算は、加法と乗法のみである。実際、まず減法については、

$$1 - 2 \notin \mathbb{N}.$$

となり、減法の結果が自然数全体の集合から飛び出てしまうことがある。除法についても同様に、

$$1 \div 2 \notin \mathbb{N}.$$

となり、除法の結果もやはり、自然数全体の集合から飛び出てしまうことがある。

一方、加法と乗法については、必ず自然数全体の集合 \mathbb{N} の中で行うことができる。なぜなら、自然数の同士の足し算も、掛け算も、答えは必ず自然数となるからである。すなわち、

$$\forall n, \forall m \in \mathbb{N} \text{ について, } n + m \in \mathbb{N}, nm \in \mathbb{N} \text{ が成り立つ.}$$

自然数全体の集合 \mathbb{N} が持つこれらの性質を、これからはまとめて次のように呼ぶことにしよう。

theorem : \mathbb{N} の性質

自然数全体が成す集合を \mathbb{N} とすると、

- \mathbb{N} は加法について閉じている。
- \mathbb{N} は乗法について閉じている。
- \mathbb{N} は減法について閉じていない。
- \mathbb{N} は除法について閉じていない。

すなわち、 \mathbb{N} は、足し算と掛け算が自由に可能であり、引き算と割り算は自由に可能でないという性質を持った数の体系である。

これで、自然数の集合では、減法と除法が自由にできないことが分かった。この重大問題を解消するために、数の体系を上手く拡張することを考えよう。まずは、減法が可能な数体系を目指すことにする。

1.2 整数

減法が可能となるためには、自然数を整数に拡張する必要がある。整数とは、自然数に負の数と 0 を加えた数の集合を表す。すなわち、

$$\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

を整数と呼ぶわけである。この整数を少し厳密に、以下のように定義する。

definition : 整数

$\forall n \in \mathbb{N}$ を考え、 n に唯一対応する数 $-n$ を考える。

$-n$ は、 $n + (-n) = 0$ を満たす数であり、この数を n の逆元という。

\mathbb{N} の全ての元（すなわち、全ての自然数）それぞれに対して定義される逆元が成す集合を \mathbb{M} としたとき、

$$\mathbb{N} \cup \mathbb{M} \cup \{0\}$$

の任意の元を、整数 (integer, zahl) と呼ぶ。整数全体の集合 (すなわち、 $\mathbb{N} \cup \mathbb{M} \cup \{0\}$) を、 \mathbb{Z} と書く。
(\mathbb{M} の任意の元を負の整数という。)

整数には負の数と 0 が含まれるので、整数の中で減法が自由に可能となる。すなわち、

- \mathbb{Z} は加法について閉じている。
- \mathbb{Z} は乗法について閉じている。
- \mathbb{Z} は減法について閉じている。

が、たとえば、

$$1 \div (-3) = 0.3333333 \dots \notin \mathbb{Z}.$$

のように、 \mathbb{Z} はやはり、除法について閉じていない。

theorem : \mathbb{Z} の性質

整数全体が成す集合を \mathbb{Z} とすると、

- \mathbb{Z} は加法, 減法, 乗法について閉じている.
- \mathbb{Z} は除法について閉じていない.

すなわち整数は、加法, 乗法, 減法が自由にできる数の体系である。

となると、じゃあ除法について閉じている数の体系が欲しいもんだな。となるのが人情なのである。

1.3 有理数

除法の結果 (商) は、必ず次のような形に表される。

$$\frac{n}{m} \quad (n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0)$$

すなわち、整数の比 (分数) によって、除法の答えは全て表現可能なのである。そこで、分数によって表すことができる数全ての集合を以下のように定義する。

definition : 有理数

$\forall n, \forall m \in \mathbb{Z}$ をとり、それらの比、

$$\frac{n}{m} \quad (m \neq 0)$$

を考える。整数の全ての組み合わせについての比を考え、それら全体の集合を考えたとき、その集合の任意の元を有理数 (rational number, quotient) と呼び、有理数全体の集合を \mathbb{Q} と書く。

有理数は、循環する小数に必ず展開することができる。

有理数は、四則演算を自由に行うことができる。すなわち、

theorem : \mathbb{Q} の性質

有理数全体が成す集合を \mathbb{Q} とすると、

- \mathbb{Q} は四則演算 (加法, 減法, 乗法, 除法) について閉じている.

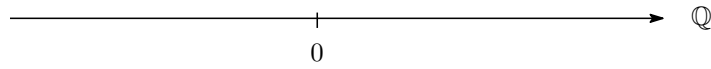
よって、有理数は、四則演算が自由にできる数の体系である。

(四則演算が自由にできる数の体系を、体 (field, Körper) という。

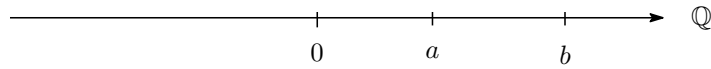
有理数全体の集合は体であるため、しばしば \mathbb{Q} は有理数体と呼ばれる。)

1.3.1 有理数の稠密性

有理数全体が作る数直線を考えよう.



この有理数直線上に, 2つの任意の有理数を表す点(有理点という) a, b をとる.



この2つの有理点の, 中点(丁度真ん中の点)を考えてみよう. 有理点 a, b の中点に対応する数が

$$\frac{a+b}{2}$$

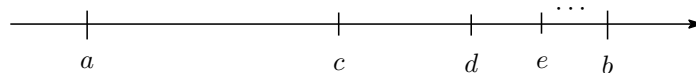
によって表されることは明らかである. そして, この数は有理数である.

(有理数が四則演算について閉じていることを使うと理由がわかる. 考えてみよう.)

このように, 有理点の中点は有理点であるという結果が得られた.

ということは, 以下のような手順を踏むと, 面白いことが分かる.

1. 任意の有理数 a, b をとる.
2. 中点 $c = (a+b)/2$ は有理数となる.
3. c, b の中点 $d = (c+b)/2$ も有理数となる.
4. d, b の中点 $e = (d+b)/2$ も有理数となる. ...



Let's thinking さあ, 何か気づいたことはないだろうか?

実は, どんなに狭い区間を考えたとしても, 有理数はその区間内に, 必ず無限に含まれる. なぜなら, その区間の両端点の中点をとり, さらにその得られた中点と区間の端点の中点をとり... という作業を繰り返せば, 区間の中に必ず無数の有理数をとれるからである.

このように, どんなに狭い区間の中にも有理数が必ず無数に含まれるということを, 有理数は稠密 (dense) であるという. そして, 有理数のこの性質を, 有理数の稠密性 (density) という.

theorem : 有理数の稠密性 (density)

有理数 (\mathbb{Q}) は稠密 (dense) である.

問題 2 \mathbb{N}, \mathbb{Z} は稠密だろうか.

1.4 無理数と実数

さて、四則演算が可能な数の体系が得られたところで、数の拡張は終わったように見える。が、実はまだ、数の拡張は道半ばなのである。

その理由は、数列の極限を考えることによって見えてくる。数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ を次のように定義しよう。

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 3}.$$

このように、数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ が漸化式 (recurring formula) によって定義されているものとする。

問題 3 $n = 1, 2, 3$ のとき、 a_n を求めよ。

計算によって分かる通り、この数列の項は全て、有理数で書くことができる。

ところが、この数列において、 $n \rightarrow \infty$ の極限を考えると、おかしなことが起きてしまうのである。これから、 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ における $n \rightarrow \infty$ の極限を求めてみよう。

まず、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ とおくと、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$ である (同じ数列の添え字を無限にしているのだから、当然だ)。

これらを、 $a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 3}$ に代入する ($n \rightarrow \infty$ を考えるわけである) と、

$$\alpha = \frac{3\alpha + 2}{\alpha + 3}.$$

となる。この方程式を α について解けば、 α の値を得ることができる。

問題 4 実際に α を求めてみよう。

簡単な 2 次方程式なので、すぐに解は求めることができるだろう。 $\alpha = \sqrt{2}$ となる。

(数列の各項は明らかに正であるので、 $\alpha = -\sqrt{2}$ は不適な解である。)

実は、 $\sqrt{2}$ は有理数ではない。そのことを今から証明しよう。

Proof. $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する。

$\sqrt{2}$ は有理数なので、 $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ (n, m は互いに素、 $n, m \in \mathbb{N}$) と書ける。

両辺に m をかけると、 $\sqrt{2}m = n$ となり、両辺を 2 乗すると $2m^2 = n^2$ 。

今、左辺は明らかに偶数 (2 の倍数) なので、右辺 n^2 も偶数である。よって、 n も偶数である。

n は偶数なので、 $n = 2k$ と書くことにすると、 $2m^2 = 4k^2$ となり、 $m^2 = 2k^2$ 。

右辺は明らかに偶数なので、左辺 m^2 も偶数。よって、 m も偶数である。

これにより、 n, m はどちらも偶数であると示された。これは、 n, m が互いに素であるということに矛盾する。よって、 $\sqrt{2}$ は有理数ではないことが示された。 \square

n, m が互いに素: n, m が 1 以外の公約数を持たないという意味。

このように、数列の極限を考えた途端に、有理数では書き表すことができない数が現れてしまうのである。

このように、有理数のみを考えていたら、数列の極限の行き先が無いことがあるわけである

(有理数は完備 (equipping) でないという)。

ビッシリ詰まっているように見えていた有理数直線は、穴だらけだったのだ。

1.4.1 有理数直線の穴を埋めよう

さて、そうすると、有理数直線の穴を何とかして埋めるしかない。
 有理数直線の穴に対応する数は、すなわち、分数で表すことができない数である。そこで、それらの数の集合を仮に \mathbb{I} と置く。この集合 \mathbb{I} の元を、以下のように呼ぶことにする。

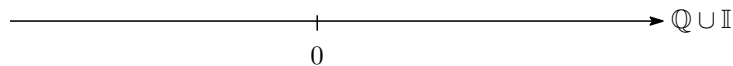
definition : 無理数

有理数直線上の「穴」に対応する数全体の集合を仮に \mathbb{I} と置く。
 この集合の任意の元を、無理数 (irrational number, surd) と呼ぶ。
 無理数は分数で表すことができない (有理数でないのだから、当たり前である)。
 無理数は、循環しない小数に必ず展開することができる。

そして、有理数全体の集合 \mathbb{Q} と、無理数全体の集合 \mathbb{I}^{*1} の和集合を考えよう。

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

この集合により数直線を作ると、その数直線は、有理数直線の穴が全て埋まった数直線となる。
 先程の数列の極限の行き先も、しっかりと用意されるのである。



このように得られる集合 $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ を、次のように定義しよう。

definition : 実数

有理数全体の集合 \mathbb{Q} 、有理数直線の穴に対応する数の集合 \mathbb{I} の和集合 $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ を考える。
 このとき、 $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ の任意の元 a を実数 (real number) と呼ぶ。
 また、実数全体の集合を \mathbb{R} と表記する。すなわち、 $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ である。

以下に、実数の性質をきちんとまとめておこう。
 (常識的に考えて明らかに分かる性質と、今までに得られた性質をまとめた)

definition : 実数の性質

- 実数は、四則演算について閉じている (\mathbb{R} は体である)。
- 実数は稠密である。
- 異なる実数の間には、大小関係が定義できる。
 ($a, b \in \mathbb{R}$ について、 $a \neq b$ ならば $a > b$ または $a < b$ が成り立つ)
- 実数列の極限は、必ず実数となる (\mathbb{R} は完備である。)

*1 ちなみに、無理数の集合を \mathbb{I} と呼ぶのは、ここだけのルールである。 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ などは常識として自然数、整数、有理数を表すと決まっているが、無理数を表す記号はきちんと決められていないので、 \mathbb{I} を何の断りもなく使うのはやめよう。

1.5 数の拡張の「一段落」

自然数から始まり、何とか実数を定義することが出来た。今までに登場した数の体系は、

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$$

の4つである。これらの記号は、使えらると非常に便利であるので、是非とも覚えておこう*2。

また、これらの集合の間には、以下のような包含関係が成り立つ。

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

これで、数の体系の拡張作業は「ひとまず」終了である。これで、微分積分学を学ぶ最も基礎となる土台は完成できた。まだ準備段階を抜け出したわけではないが、着実に、微分、積分を目指して前進して行こう。

1.5.1 【余談】無理数の定義と、Dedekind の切断

先程、「有理数直線上の穴に対応する数」として無理数を定義したが、当然、数学的にこんなに曖昧な定義が許されるワケがない。無理数は、本当はもっと慎重に定義する必要があるのだ（というか、自然数も、整数も、有理数も、本当はもっと厳密に定義しなければいけない）。

無理数の定義を最初に厳密に行ったと言われるのは、Julius Wilhelm Richard Dedekind という数学者であった（ちなみに、彼の誕生日と私の誕生日は同じである）。

彼は切断 (cut) という手法を巧みに使い、見事な手順で厳密に無理数を定義して見せた。その方法の巧みさと美しさゆえに、Dedekind の切断は今でも非常に有名な方法である（Dedekind の切断を知らない数学者はいないだろう）。

興味があれば、微分積分学の本やネットを使って調べればいくらでも情報が見つかるはずなので、チャレンジしてみても良いかもしれない（切断はそれほど難解な手法ではないので、十分に理解は可能である）。

*2 \mathbb{N} は、自然数を表す natural number の \mathbb{N} , \mathbb{Z} は、ドイツ語で整数を表す zahl の \mathbb{Z} , \mathbb{Q} は、有理数を表す quotient の \mathbb{Q} , \mathbb{R} は、実数を表す real number の \mathbb{R} である。

第2章

極限, 収束, 発散

数の体系を実数まで拡張し終えたところで, 次は極限, 収束, 発散について学ぼう. 極限, 収束, 発散は, 微分積分学とは切っても切り離せないほど重要なので, やはりしっかりと厳密に定義をしなければならない.

2.1 数列の極限の定義 (高校レベル)

高校数学のレベルでは, 数列の極限を以下のように定義した.

definition : 数列の極限

n を限りなく大きくしたとき, 数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ の値が限りなく α に近づくのならば, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ は α に収束 (converge) するといい, 以下のように表す.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha.$$

また, このような α を, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ の極限值 (limit) という.

このような定義は, とてもなじみ深いものであるだろう. 確かにこの定義を利用すれば, 直感的に極限を捉えやすく, しかも, それなりの問題に対してならば問題無く対応することができる.

実際に, 1 問例題を解いてみよう (数列の極限の問題は非常に重要なので, 別資料で対策を行う予定である).

例題 次の一般項により定義される数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}.$$

$n \rightarrow \infty$ (すなわち, n が限りなく大きくなる) ならば, 明らかに $\frac{1}{n}$ は 0 に近づくので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1} = 1 \quad //$$

数列の極限はこのように求める. これといって難しい手順もなく, 極限の定義も先程のもので十分に事足りた. このように, 数列の極限は, とても簡単に求められる場合がある. 2 問問題を解いて練習してみよう.

問題 5 数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ が $a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$ ($n \in \mathbb{N}$) で与えられているとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ を示せ.

問題 6 数列 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ が $b_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1}$ ($n \in \mathbb{N}$) で与えられているとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ を示せ.

さて, 数列の極限が定義できたように見えるわけだが, 次のような問題を与えられたとき, 我々はどのように対処すれば良いのだろうか.

例題 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ を証明せよ.

先程の問題を解くのに使った, 暗黙の結果である. この事実を数学的に証明せよと言われてしまったら, 私達は一体どうすれば良いのだろうか. お手上げだろうか.

n が限りなく大きくなるので, 明らかに $\frac{1}{n}$ は際限なく小さくなります.
 これで, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ が成り立つことが証明できました.

工学部以外でこの答えを書いた答案を提出したら, 間違いなく 0 点を頂戴してしまうだろう (も貰えない). また, 以下のような問題点は一体どのように解決すべきなのだろうか.

- 収束の速さは考慮する必要は無いのか?
- 収束の仕方には, 色々な種類があるんじゃないだろうか?
- そもそも, 本当にそれで数列の極限を扱えたことになるのか?

答えは全て NO である. 実は, ひとたび少し込みいった数学に立ち入ってしまったら, 極限の定義は「限りなく近づく」では不十分となってしまう. 我々は, もっと厳密に正しい数列の極限の定義を行う必要があるのだ. そして, 厳密に数列の極限を定義するために使う方法が, ϵ - N 論法という考え方である.

2.2 数列の極限の定義 (ϵ - N 論法)

ϵ - N 論法とは, 「極限」をもっと厳密に定義するための方法である. この方法は非常に強力な方法であるが, 非常に考え方が複雑で, 理解がしにくいことが広く知られている. また, 最近は理学部数学科の講義ですら, 取り上げられないこともあるという. が, やはり微分積分を勉強する上での準備をしっかりとしておくためという理由によりここでは ϵ - N 論法について取り上げることにするが, あまり深くは立ち入らないことにして, 概要だけをさらっと説明するつもりである.

2.2.1 ϵ - N 論法の考え方

復習: 高校レベルでの数列の極限の定義

n を限りなく大きくしたとき, 数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ の値が限りなく α に近づくのならば, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ は α に収束 (converge) するといい, 以下のように表す.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha.$$

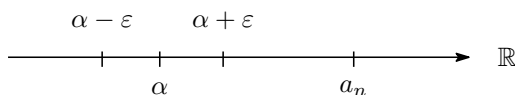
また, このような α を, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ の極限值 (limit) という.

この定義をもっと厳密なものに直す. これを目標として話を進めよう.

まず、この定義を読み替えると、次のように解釈ができることが分かるだろうか。

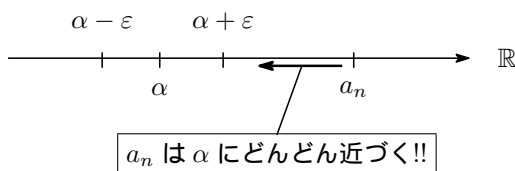
どんなに小さな正の数 ϵ を考えても、 n を「ある値」よりも大きくすれば、 a_n と α の差を ϵ よりも小さくすることができる。

すなわちこうである。

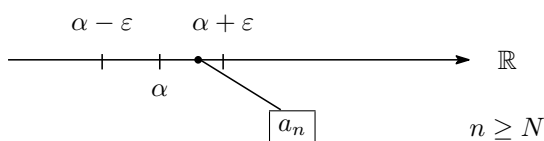


実数直線上に、上図のような点をそれぞれ考える。 a_n は数列の値 (n によって動く) であり、 α は極限值 (定数)、そして、 ϵ は任意の小さな正の数である。

さて、今定義しなおしたいのは、 n が限りなく大きくなるとき、 a_n が α に限りなく近づくということである。このことを念頭に置いて考えると、 n を大きくすれば、 a_n はどんどん α に近づくはずだ。



そして、 n を大きくすればするほど、 a_n と α の距離 $|a_n - \alpha|$ は際限なく縮まって行く。すなわち、 n をある数 N よりも大きくすれば、どんなに小さな数 ϵ よりも、 a_n と α の距離 $|a_n - \alpha|$ は小さくできるはずである。



そして、このような性質を満たす N は、必ず存在するはずである。

今までの議論は、 ϵ さんと N くん の会話に例えると分かりやすい。

- ϵ さん 「 $|a_n - \alpha|$ を $\underbrace{0.0001}_{\epsilon}$ より小さくしたいの! 」
- N くん 「はい、じゃあ、 n を $\underbrace{10001}_{N}$ 以上にしてください! 」

N くんが、 ϵ さんがどんなに小さな数 ϵ を要求しても的確な答え N を返せるとき、 a_n は α に収束すると言えるのだ (先に決まるのが ϵ で、 N は ϵ に従属して決まるのである)。

2.2.2 ϵ - N 論法による数列の収束の定義

以上の議論を総合して、極限の新しい定義を作ってみよう。

任意の正の数 ϵ について、 $n \geq N$ とすれば $|a_n - \alpha| < \epsilon$ となるような N が必ず存在するとき、 a_n は α に収束 (converge) するという。

これが収束の新しい、厳密な定義である。が、日本語の文章のままだと書くのが面倒だし、いちいち煩わしいので、数学っぽく論理記号を使って書いてみよう。上の文章を論理記号を使って書くと…

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon.$$

が成り立つとき、 a_n は α に収束 (converge) するという。^a

^a \exists は、存在 (exist) するという意味。s.t. (such that) は「どんな~かというと・・・」と読もう。

論理記号を使うとややこしく見えるかもしれないが、ひとたび慣れてしまえば、論理記号による記述のほうが明確で、洗練されているということに気づくはず。最初は大変だけど、頑張って論理記号を使う練習をしよう。

definition : ϵ - N 論法による数列の収束

数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ について、

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon.$$

が成り立つならば、 a_n は α に収束 (converge) するといいい、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha.$$

と表記する。 α を、数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ の極限值 (limit) という。

以上で、数列の収束の厳密な定義はオシマイである。「限りなく」という曖昧な表現を使わずに数列の極限を定義すると、こんなにも見慣れない表現となるのだからなかなか驚きだろう。

この定義を用いた計算等の練習は特に行わないが、このような定義の仕方があるということは、常識として知っておいても良いかもしれない (知っているとかっこイイかも)。

それでは、1問だけ、 ϵ - N 論法を使った証明問題をやってみることにする。

例題 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ を証明せよ。

この問題は、 ϵ - N 論法無しでは太刀打ちできないが、 ϵ - N 論法をひとたび使えば、すぐに証明可能だ。

Proof. まず、この証明は、以下のことを証明することと同じである (ϵ - N 論法により)。

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \epsilon.$$

すなわち、このような命題を満たす N の存在を言えば良いことになる。

$$\left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \epsilon \text{ より, } n > \frac{1}{\epsilon} \text{ が得られる.}$$

ここで、 $N > \frac{1}{\epsilon}$ を満たす任意の自然数を N をすれば、 $n \geq N$ のとき、 $\left| \frac{1}{n} \right| < \epsilon$ となる。

このような N は、任意の ϵ に対して定まるので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ が成り立つ。 □

このように、 ϵ - N 論法を使えば、厳密な証明を与えることができる。

また、 ϵ - N 論法の御利益は他にもある。何と、 $n \rightarrow \infty$ のときに $1/n \rightarrow 0$ となることだけでなく、次のようなことまで分かってしまうのだ。

$$\frac{1}{n} < \underbrace{0.0001}_{\epsilon} \text{ とするためには, } n \geq \underbrace{10001}_{N} > \frac{1}{0.0001} \text{ とすれば良い.}$$

$$\frac{1}{n} < \underbrace{0.0002}_{\epsilon} \text{ とするためには, } n \geq \underbrace{5001}_{N} > \frac{1}{0.0002} \text{ とすれば良い.}$$

このように、 ϵ - N 論法は、極限をこれほどまでに詳しく扱うことすらも可能にしてしまう。

ϵ - N 論法についてのこれ以上の言及はやめておくことにするが、 ϵ - N 論法をもっと詳しく学びたい！という読者は、田島一郎 著「数学ワンポイント双書 イプシロン・デルタ」に是非チャレンジしてみるべし。

2.2.3 ϵ - N 論法による数列の発散の定義

数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ の $\pm\infty$ への発散は、以下のように定義されていた。

definition : 数列の $\pm\infty$ への発散

n を限りなく大きくしたとき、数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ の値が限りなく大きく（小さく）なるならば、 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ は発散 (diverge) するといい、以下のように表す。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty.$$

a_n が限りなく大きくなるときは $+\infty$ に発散し、 a_n が限りなく小さくなるときは $-\infty$ に発散する。

このことを、 ϵ - N 論法により定義すると、以下ようになる。

definition : ϵ - N 論法による、数列の $\pm\infty$ への発散

数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ について、

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow a_n > M.$$

が成り立つならば、 a_n は $+\infty$ に発散 (converge) するといい、以下のように表す。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

さらに、数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ について、

$$\forall M < 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow a_n < M.$$

が成り立つならば、 a_n は $-\infty$ に発散 (converge) するといい、以下のように表す。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

この定義の意味は、前頁の収束の定義が理解できたのなら、恐らく容易に理解できるだろう。論理記号に戸惑うかもしれないが、頑張ってよく読んで理解してほしい。

さて, 微分積分学を学ぶための「準備」は, とりあえずこのくらいにしておこう.

これからはよいよ, 微分, 積分について学ぶこととなる. 今までに学んだ内容が使われることは, 正直言ってほとんどないのだが, 間違いなく, 今まで学んだ内容はこれから学ぶ微分積分学の土台となる非常に重要な部分である. だからどうか, 今までの内容が「時間の無駄」だとか「労力の無駄」だとか「筆者の自己満足」だとか思わないでほしい. 今までの議論はいわば, 大事な土台の構築作業だったのである.

それでは次章からはよいよ微分 (differential) の内容に入っていくことになる.

必要な準備を整った. さあ, 「解析学の最強武器」を手に入れるための旅を始めよう.

第3章

微分

突然だが、こんな有名な冗談がある。

微分は「微かに分かる」。積分は「分かった積もり」。

が、はっきり言って、「微かに分かる」、「分かった積もり」ではお話にならない。

微分積分学は、数学の基礎の基礎となるものである。よって、「微かに分かる」、「分かった積もり」どころか、意のままに微分、積分を扱えるほどに理解できていなければならないのだ

微分と積分は、数学や物理学等の世界を記述する共通の言語であると言っても良いほどに重要なのである。

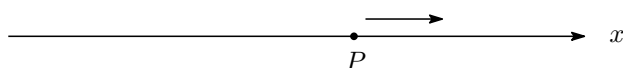
というわけで、これからそのうちの1つ、微分について学ぶ。解析学の最強武器とすら呼ばれるほどの強力な微分というツールの使い方を、是非ともマスターしよう。

3.1 位置と速度

時間 t における x 軸上の位置 x が $x = x(t)$ で表されるような質点^{*1} P を考える。

今、この質点 P が、各時間 t においてどのくらいの速度 (velocity) で移動しているのか？ということを考えてみよう。

P の、各時間 t における瞬間的な速度は？



速度とは、時間あたりに進む距離のことを指す。たとえば、時間が $t = t_0$ から $t = t_1$ まで変化する間に質点 P が $x = x_0$ から $x = x_1$ まで動いたのなら、 $t = t_0$ から t_1 までの質点 P の平均速度 v は、

$$v = \frac{P \text{ が移動した距離}}{P \text{ が移動するのにかけた時間}} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}.$$

によって表される。

次に、質点 P がある瞬間 $t = t_0$ において、どのくらいの速度で動いているのかということを考えてみよう。

時間 t が、 $t = t_0$ から $t = t_0 + \Delta t$ まで変化したとしよう。このとき、位置は $x = x(t_0)$ から $x = x(t_0 + \Delta t)$

^{*1} 重さも大きさも無い点のこと。

まで変化することになる。このとき、 $t = t_0$ から $t = t_0 + \Delta t$ までの質点 P の平均速度 v は、

$$v = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\underbrace{\Delta t}_{(t_0 + \Delta t) - t_0}}$$

によって表すことができる。考え方は、最初の例と全く同じである。

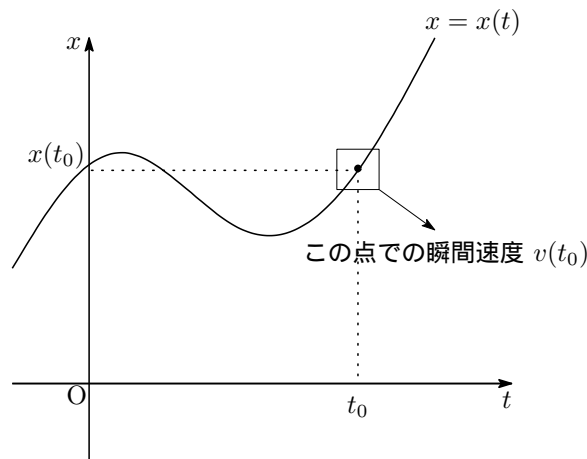
ところで、今考えたかったのは $t = t_0$ における瞬間的な速度であった。すなわち、 $t = t_0$ というある「一瞬の速度」を考えたいのだから、上式において、時間の変化分 Δt を限りなく小さくすれば良いことになる。限りなく小さくするということは、すなわち、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとるという操作に相当するので、 $t = t_0$ における質点 P の瞬間速度 $v(t_0)$ は、以下のように表すことができる。

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$

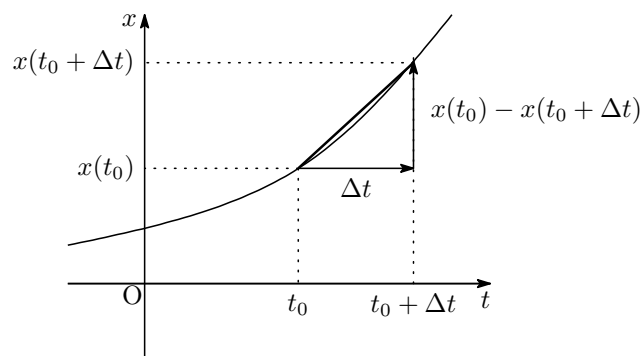
これが、質点 P の $t = t_0$ における瞬間的な速度を表す式である。

では次に、この式が一体何を表すのかを考えることにする。

横軸を t (時間) 軸とし、各時間に対応する質点 P の位置 $x = x(t)$ を、縦軸に表すことにしよう。



上図で着目している点 $(t_0, x(t_0))$ の近くについて、もっと詳しく調べてみよう。

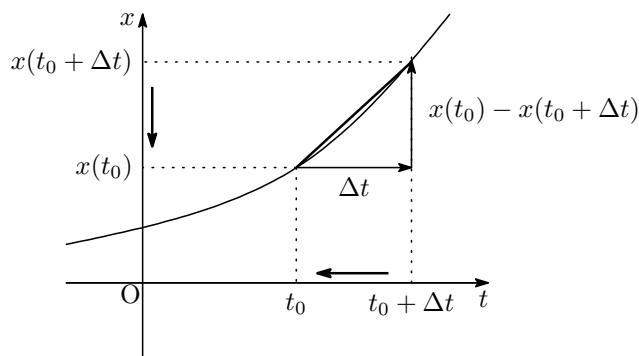


図において、太線(点 $(t_0, x(t_0))$ と $(t_0 + \Delta t, x(t_0 + \Delta t))$ を結ぶ線分)の傾き m を求めてみよう。傾き m は、以下のように求めることができる。

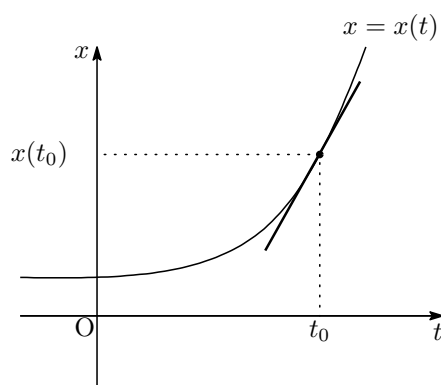
$$m = \frac{\text{縦方向の移動分}}{\text{横方向の移動分}} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t},$$

この m は、先程の v 、すなわち、 $t = t_0$ から $t = t_0 + \Delta t$ の間での質点 P の平均速度と一致している。

さて、次に $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を考えてみよう。 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると、 $t_0 + \Delta t \rightarrow t_0$ となる。



したがって、 $\Delta t \rightarrow 0$ とした上で先程と同様の傾きを求めれば、 $t = t_0$ における接線 (tangent line) の傾きが得られることが分かる。



図の接線の傾きを $m(t_0)$ とおくと、

$$m(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

と求められる。これは、前頁に示した $t = t_0$ における P の瞬間速度 $v(t_0)$ と完全に一致している。

このように、ある点 $t = t_0$ における位置 x の瞬間的な変化、すなわち、瞬間速度 $v(t_0)$ は、 $t = t_0$ における $x(t)$ の接線の傾きに相当し、その値 $v(t_0)$ は、

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

により求められることが分かった。位置のグラフの接線の傾きを求めるだけで、その速さがわかってしまう。何だか単純だけど結構凄くないだろうか？これって。

3.2 微分の定義

前節の議論を、一般の関数 $f(x)$ についても考えよう。以下のように定義される $m(x_0)$ を考える。

$$m(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

$m(x_0)$ は、前節の議論から明らかなように、 $x = x_0$ における、 $f(x)$ の接線の傾きを表している。

実はこの $m(x_0)$ は、解析学、そして数学、物理学において最も重要な量である。この $m(x_0)$ は、 $f(x)$ の $x = x_0$ における微分係数 (derivative) と呼ばれ、 $\frac{df(x_0)}{dx}$, または $f'(x_0)$ と表記することに決まっている。

definition : 微分係数

連続かつ滑らかな関数 $f(x)$ について,

$$\frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

を, $x = x_0$ における $f(x)$ の微分係数 (derivative) という.

$f'(x_0)$ は, $x = x_0$ における, $f(x)$ の接線の傾きを表す.

また, $x = x_0$ に限定せずに, 一般の変数 x についても微分係数に相当するもの考えることができる (その場合, x は定数ではなく変数であるので, x の関数となる.)

definition : 導関数

連続かつ滑らかな関数 $f(x)$ について,

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

を, $f(x)$ 導関数 (derivative) という.

$f'(x)$ は, x の値によって, その点での $f(x)$ の接線の傾きを返す関数である.

そして, 関数 $f(x)$ の導関数を求めることを, 微分 (differential) という.

definition : $f(x)$ の微分

連続かつ滑らかな関数 $f(x)$ の導関数を求めることを, $f(x)$ を微分するという.

以上が, 微分の定義である. この定義はこれから学ぶ全ての内容の基礎であるので, しっかりと理解しておこう. 基礎無しで応用はあり得ない. ここで土台をしっかりと固めておこう.

3.3 微分の性質

関数の微分が持つ様々な性質を順に示す.

theorem : 微分の性質

微分可能な関数 $f(x), g(x)$ について, 以下の性質が成り立つ. ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$)

1. $\{\alpha f(x) \pm \beta g(x)\}' = \alpha f'(x) \pm \beta g'(x)$ (微分の線形性)
2. $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (積の微分公式)
3. $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ (商の微分公式)

これらの性質の証明は省略する。微分の定義を使えば証明できるので、調べるなり考えるなりして、自分で証明を完成させてみよう。(それほど難しい証明ではない)

3.3.1 【余談】位置, 速度, 加速度

質点 P の時間 t における位置を $x = x(t)$ としたとき, 最初の章で述べた通り, 質点 P の速度 $v = v(t)$ は,

$$v(t) = x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

により求めることができる。すなわち, 速度は位置の微分ということが出来るワケである。

速度は微分の定義により, 位置の瞬間的な変化(位置が瞬間的にどのくらい変化しているか)を表している。

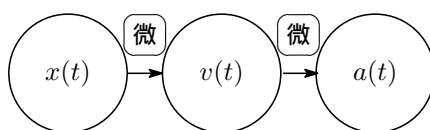
では, 同様に速度 $v(t)$ の瞬間的な変化 ($a(t)$ とする) を考えてみよう。

$$a(t) = v'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

これは, $v(t)$ の導関数であり, 各時間 t における速度の瞬間的な変化(速度が瞬間的にどのくらい変化しているか)を表している。この $a(t)$ を, 質点 P の加速度 (acceleration) という。

明らかに加速度は, 速度の微分ということが出来る。

これらの結果から, 位置 $x(t)$, 速度 $v(t)$, 加速度 $a(t)$ の間には, 以下のような関係が成り立っている。



問題 7 $(c)' = 0$ を微分の定義により証明せよ (c は定数)。

問題 8 $(x^n)' = nx^{n-1}$ を微分の定義により証明せよ (n は自然数)。

問題 9 $(\sin x)' = \cos x$ を微分の定義により証明せよ。

問題 10 $(\cos x)' = -\sin x$ を微分の定義により証明せよ。

問題 9,10 について

三角関数の最も有名な極限公式,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

を用いても良い。この極限公式は大変重要なので覚えておこう。

3.4 絶対に覚えておくべき2つの微分公式

これから、初等的な2つの関数の微分公式を以下に順に示す。これらの微分公式は、導出できるスキルも勿論重要だが、最低限暗記しておかなければ、この先困ることになる。よって、必ずマスターしておこう。

3.4.1 x^n の導関数

$n \in \mathbb{N}$ の場合については、問題8で示したとおり、 $(x^n)' = nx^{n-1}$ となる。実はこの事実は $n \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ の全ての場合についても成立することが知られている。証明は結構大変なのでここでは省略するが、興味があれば是非とも自力で頑張るなり、ググるなりで証明を完成させてみよう。

theorem : x^n の微分公式

$x \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{C}$ について、以下の公式が成立する。

$$\frac{d}{dx}(x^n) = (x^n)' = nx^{n-1}$$

この公式を用いれば、任意の x についての整関数(多項式)の微分を求めることができる。以下に例を示そう。

例題 $f(x) = 2x^3 + x^2 + 5x + 2$ のとき、 $f'(x)$ ($f(x)$ の導関数) を求めよ。

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^3 + x^2 + 5x + 2)' \\ &= 2 \cdot (x^3)' + (x^2)' + 5 \cdot (x)' + (2)' \quad (\text{微分の線形性}) \\ &= 2 \cdot (3x^2) + (2x) + 5 \cdot 1 + 0 = 6x^2 + 2x + 5 \quad (x^n \text{ の微分公式}) \quad // \end{aligned}$$

このように、微分の線形性と組み合わせにより、簡単に導関数を求めることができた。また、次の例題に示すような複雑な整関数についても、導関数は簡単に求めることができる。

例題 $g(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{\sqrt{2}} + x^\pi + x^{1+i}$ のとき、 $g'(x)$ を求めよ。

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^{\frac{1}{2}} + x^{\sqrt{2}} + x^\pi + x^{1+i})' = (x^{\frac{1}{2}})' + (x^{\sqrt{2}})' + (x^\pi)' + (x^{1+i})' \\ &= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1} + \pi x^{\pi-1} + (1+i)x^{1+i-1} \\ &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1} + \pi x^{\pi-1} + (1+i)x^i \quad // \end{aligned}$$

3.4.2 三角関数の導関数

三角関数 $\sin x, \cos x$ の微分についても、問題9,10において証明済みであった。

theorem : $\sin x, \cos x$ の微分公式

$x \in \mathbb{C}$ について、以下の公式が成立する。

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = (\sin x)' = \cos x, \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = (\cos x)' = -\sin x$$

では、この2つの微分公式を用いて、 $\tan x$ の微分公式を導いてみよう。

例題 $(\tan x)'$ を求めよ。

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \quad (\text{商の微分公式}) \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\sin^2 x + \cos^2 x = 1) \\ &= \sec^2 x \quad // \end{aligned}$$

このように、 $\tan x$ の導関数は $\sec^2 x$ であることが導けた。

theorem : $\tan x$ の微分公式

$x \in \mathbb{C}$ について、以下の公式が成立する。

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

この公式は簡単に導出できるので絶対に暗記が必要というわけではないが、まあ覚えておいて損はない微分公式である。これから案外役に立つことも多いので、余裕があれば覚えておこう。

3.5 微分の連鎖法則

初等的な2つの関数の微分公式を示したところで、これから、微分において最も役に立つ、微分の連鎖法則 (chain rule of differential) について説明しよう。微分の連鎖法則は、合成関数の微分法とも呼ばれ、微分法において大変重要な役割を果たす、絶対に知っておかなければならない法則である。

3.5.1 合成関数

何かの「ある関数」の関数であるような関数を、合成関数という。これだけだといまいちピンと来ないかもしれないので、以下に例を示そう。

例 $f(y) = \sin y$, $y = g(x) = 2x$ とする。

このとき、 $y = g(x) = 2x$ なので、 $f(y) = f(g(x)) = f(2x) = \sin y = \sin 2x$ となる。

この場合、 $f(y) = f(2x) = \sin 2x$ は、 x の関数 $g(x) = 2x$ の関数であるので、合成関数である。

★ $f(y)$ が、 $y = g(x)$ を経由して、結局は x の関数となっていることに注意しよう。

このような合成関数の微分をどのように行えば良いのだろうか、ということについて考えてみよう。

例題 $f(y) = y^2 + 2y + 1$, $y = 2x$ のとき、 $\frac{df}{dx}$ を求めよ。

この場合、 $f(y)$ は、 $y = 2x$ を経由して、結局 x の関数となる。よって、 $f(y)$ は一見 y の関数のように見えるが、 y が x の関数となっている ($y = 2x$) ことより、 x で微分することが可能となる。

まずは素直に、 $y = 2x$ という関係を使って、 $f(y)$ を x を使って書き換え、それを x で微分してみよう。

$$\begin{aligned} f(y) &= y^2 + 2y + 1 = f(2x) = (2x)^2 + 2 \cdot (2x) + 1 \\ &= 4x^2 + 4x + 1. \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{df}{dx} = (4x^2 + 4x + 1)' = 8x + 4. \quad //$$

このように、関数 f の、 x による微分を求めることができた。

それじゃあ、この調子で次の例題に行ってみよう！

例題 $g(y) = \sin y$, $y = 2x$ のとき、 $\frac{dg}{dx}$ を求めよ。

さっきと同じように、 $y = 2x$ を、 $g(y) = \sin y$ に代入し、 x により微分すると...

$$g(y) = \sin y = g(2x) = \sin 2x$$

$$\therefore \frac{dg}{dx} = (\sin 2x)' = \dots \text{あれ?}$$

先程の $f(y)$ の例では、微分の線形性を使うことによって、簡単に x で $f(y)$ を微分することができた。ところがどうだろう。 $g(y)$ の場合、 $g(2x) = \sin 2x$ は、いくら線形性を使おうと、うまく微分することができないようだ。さてどうしたものか。こういうものは微分不可能で片付けちゃって良いんだろうか？ いや、良くないよな、良いわけがない。せめてこの程度の関数くらいは微分できなきゃ話にならないだろ JK...

3.5.2 微分と微分が手を繋ぐ

さて、どうしたものか。何とかして $g(y)$ を x で微分できないのだろうか。

$g(y)$ は y の関数、そして、 y は x の関数である。そこで、こんなことを考えてみよう。

- $\frac{dg}{dx}$ を求めるために、 $\frac{dg}{dy}$, $\frac{dy}{dx}$ を利用できないだろうか？

$g(y)$ は y の関数なので、 y で微分することは簡単である。また、 y は x の関数なので、 x で簡単に微分できる。そこで、その2つの微分を組み合わせて、 $\frac{dg}{dx}$ を求められないだろうか？ということを考えてみよう。

よく見てみると、 $\frac{dg}{dx}$, $\frac{dg}{dy}$, $\frac{dy}{dx}$ って、何となく分数のような形をしている。

分数には、約分という操作ができた。例えば次のように...

$$\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}.$$

そこで、あくまで厳密ではないことに注意してほしいが、 $\frac{dg}{dx}$ って、約分の逆っぽい感じで次のように変形できないだろうか？

$$\underbrace{\frac{dg}{dx}}_{\text{わからん}} = \underbrace{\frac{dg}{dy}}_{\text{わかる}} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\text{わかる}}$$

この関係式を使って、先程の例題をもう一度解いてみよう。

例題 $g(y) = \sin y$, $y = 2x$ のとき、 $\frac{dg}{dx}$ を求めよ。

まず、 $\frac{dg}{dy} = \cos y$, $\frac{dy}{dx} = 2$ である。

$$\underbrace{\frac{dg}{dx}}_{\text{約分の逆}} = \frac{dg}{dy} \frac{dy}{dx} = \cos y \cdot 2 = 2 \cos y = 2 \cos 2x \quad //$$

と、今回は途中で引っかかることなく、最後まで結果を導き出すことができた。
 が、この答えは正しいのかが全くわからない。そこで、最初の例題をこの方法で再度解いてみよう。

例題 $f(y) = y^2 + 2y + 1$, $y = 2x$ のとき, $\frac{df}{dx}$ を求めよ.

まず, $\frac{df}{dy} = 2y + 2$, $\frac{dy}{dx} = 2$ である.

$$\frac{df}{dx} = \underbrace{\frac{df}{dy} \frac{dy}{dx}}_{\text{約分の逆}} = (2y + 2) \cdot 2 = 4y + 4 = 8x + 4 \quad //$$

おっと、何と、最初に解いたときの答えと完全に一致している。

実はこの、「約分の逆のような操作」は、必ず成立することが証明されている。

約分の逆になっているから明らかに成り立ちます。Q.E.D. では当然 0 点の証明である（第一、微分を分数のように扱って良いことを証明していないので、全く厳密な証明ではない）が、イメージとしては、微分では、約分の逆が成立すると思っていてくれて構わない。

この法則は、簡単な微分が連鎖のように手を繋いで、難しい微分を見事に作り出しているように見えないうか。微分という演算において、これほどまでに綺麗な法則が成り立つのは、本当に凄いことである。この法則を、微分の連鎖法則という。

theorem : 微分の連鎖法則

$y = f(g(x))$ (f は, g の合成関数) であるとき,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$$

が成立する。この法則を、微分の連鎖法則 (chain rule of differential),
 または合成関数の微分法という。

厳密な証明は省略する。他の詳しい参考書を参照すべし。

問題の解き方

1. まず、微分すべき関数が何の合成関数になっているかを見抜く。
2. その合成関数の部分を、適当に置き直す。
3. 微分の連鎖法則を適用せよ！

最初はこの方法で、ゆっくりと微分の連鎖法則に慣れよう。そして問題を解くうちに、いちいち置き換えをせずとも、暗算で合成関数が微分できるようになるはずである。

問題 11 $\left\{ \frac{x}{\sqrt{2x+1}} \right\}'$ を求めよ.

問題 12 $(\sin^2 x)'$ を求めよ.

問題 13 $\left\{ \frac{1}{(2x^2+x+1)^3} \right\}'$ を求めよ.

問題 14 $(\sin^2 x + \tan 2x)'$ を求めよ.

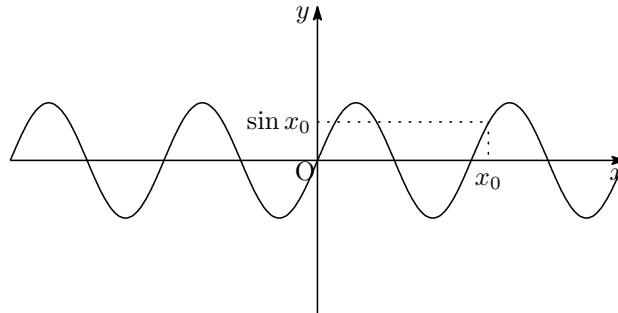
問題 15 $(\cos^3 2x + x \cos^3 x)'$ を求めよ.

3.6 逆三角関数

三角関数 $\sin x, \cos x, \tan x$ には, 逆関数を定義することができ, それらを総称して逆三角関数 (inverse trigonometric function) と呼ぶ.

3.6.1 逆三角関数の定義

まず, 逆三角関数を定義しよう. $\sin x$ のグラフを以下に示す.

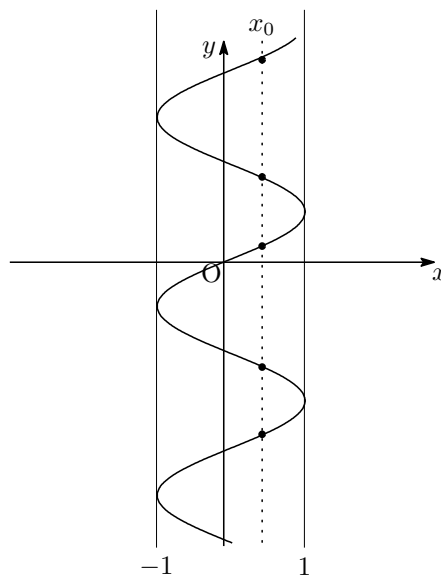


このように, 任意の実数 $x = x_0$ を 1 つ決めれば, 対応する $\sin x$ の値 $\sin x_0$ ($-1 \leq \sin x_0 \leq 1$) が必ず 1 つだけ定まる. ここまでは, 基礎数学の復習である.

さて, 逆関数とは, この逆の関係を与える関数であった. すなわち, 任意の $\sin x$ の値 ($-1 \sim 1$) が与えられたときに, それに対応する x を返す関数のことである. 今から, $\sin x$ の逆関数について考えてみよう.

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f^{-1}(x) \text{ を考える.}$$

というわけで, $-1 \sim 1$ までの任意の実数 x_0 が与えられたとき, $x_0 = \sin y_0$ を満たす y_0 を返すような関数 $y = f^{-1}(x)$ を考えてみよう. そのグラフを考えると, 以下のようなグラフになる.



このグラフを見ると、 x_0 を1つ定めると、無数に y の値 y_0 が定まってしまうことが分かる。

(例えば 1 という値を定めれば、 $1 = \sin y$ を満たす y は $y = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 4\pi, \dots$ と無数に存在する)

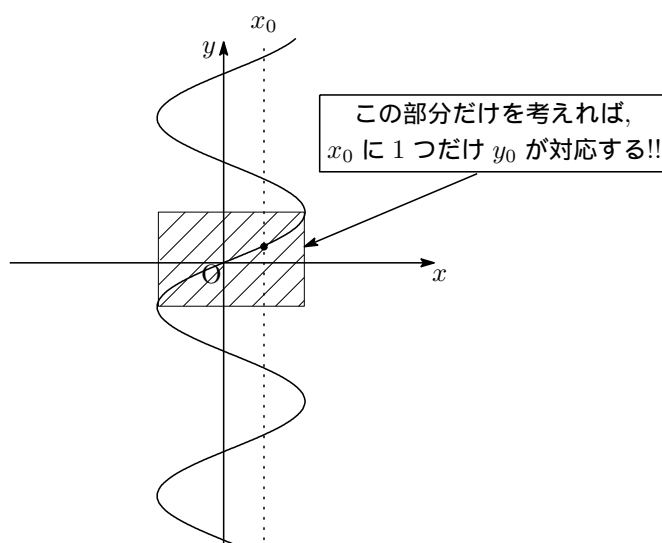
一般に 関数とは 1つの値に対して1つの値を対応づける規則 のことを言うので、このように、複数の値が対応づけられてしまう y を関数と呼ぶことは出来ない。よって、この y は、逆関数として成立していない。

3.6.2 ちょっとした制限を加えてみる

このように、 $\sin x$ という三角関数を考えたとき、この逆関数は簡単には定義できないことが分かった。そこで、次のことを考えてみよう。

- $x = \sin y$ において、 y の取り得る値の範囲をうまく制限すれば、1対1対応が得られないだろうか？

つまり、 $x = \sin y$ を満たす y の値が欲しいけど、「 y の範囲は”ここ”から”ここ”までね！」と制限をかけるのである。こうすることにより、無数に対応していた y の値を絞ることができる。



そして、その制限をどのようにかけるかを考えると、上図のように y の範囲を制限するのが最も自然であることが分かるだろう。上図において、 y の範囲は $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ である。

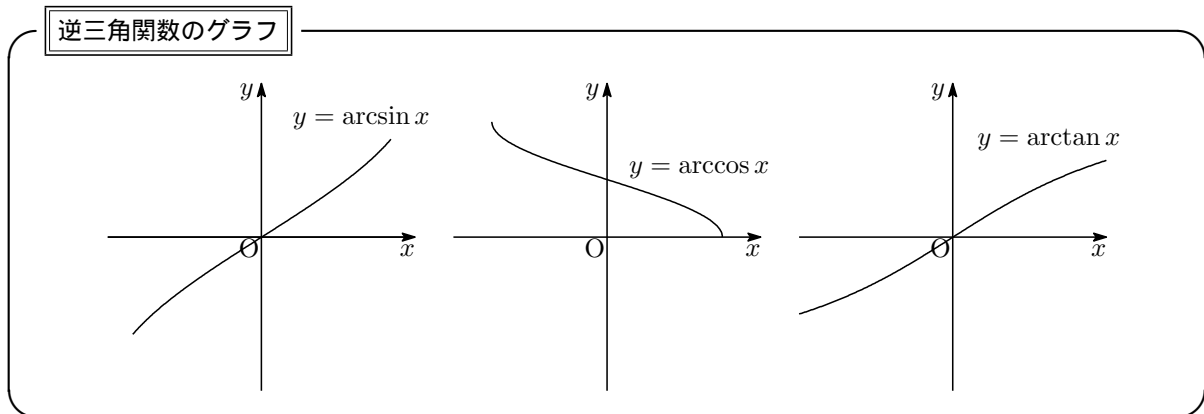
$\sin x$ の逆関数はこのように 値の範囲を制限して定義する。

また、 $\cos x, \tan x$ の逆関数についても、 $\sin x$ と同様の考え方により、値の範囲が自然に制限される。これらの三角関数の逆関数の定義を、以下にまとめて示そう。

definition : 逆三角関数

1. $y = \sin x$ について、 $x = \arcsin y$ と表し、 x の値を y のアークサイン (逆正弦) と呼ぶ。
ただし、 $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$ と制限する。
2. $y = \cos x$ について、 $x = \arccos y$ と表し、 x の値を y のアークコサイン (逆余弦) と呼ぶ。
ただし、 $0 \leq \arccos x \leq \pi$ と制限する。
3. $y = \tan x$ について、 $x = \arctan y$ と表し、 x の値を y のアークタンジェント (逆正接) と呼ぶ。
ただし、 $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$ と制限する。

そして、このように定義できる関数 $y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x$ を、逆三角関数と呼ぶ。



3.6.3 逆三角関数の導関数

逆三角関数の導関数は、微分の連鎖法則を使うことによって見事に導出することができる。まず最初に、関数 x を次のように置こう。

$$x = \sin y \text{ とおく} \Rightarrow \underline{y = \arcsin x} \text{ となる。}$$

そして、どうにかして $\frac{dy}{dx}$ を求めれば、逆三角関数の導関数が求められたことになる。

そのためにまず、 $x = \sin y$ の両辺を x で微分しよう。

$$1 = \frac{d(\sin y)}{dx}.$$

今、右辺の $\sin y$ は明らかに y の関数であり、 $y = \arcsin x$ より、 y は x の関数である。よって、右辺に微分の連鎖法則を適用すると...

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{d(\sin y)}{dy} \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\text{お目当て}} \\ &= \cos y \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

ここで、 $\cos y$ を、 x を使って表現することを考える。 $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ より、 $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ なので、 $\cos y$ は、 $\cos y = \underbrace{\sqrt{1 - \sin^2 y}}_{x = \sin y \text{ より}} = \sqrt{1 - x^2}$ と表現できることが分かる。よって、

$$1 = \sqrt{1 - x^2} \frac{dy}{dx}.$$

あとは、両辺を $\sqrt{1 - x^2}$ で割れば、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad //$$

このように、微分の連鎖法則を使うと、間接的に逆三角関数の導関数を導き出すことが出来る。微分の連鎖法則は、こんな風に威力を発揮するのである。ちなみに、 $\arccos x, \arctan x$ に関しても、ほぼ同様に証明できる。

theorem : 逆三角関数の導関数

1. $(\arcsin x)' = \frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. $(\arccos x)' = \frac{d(\arccos x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. $(\arctan x)' = \frac{d(\arctan x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.

問題 16 上の定理の 2,3 を証明せよ.

HINT : $\arccos x$ の導関数は $\sin x$ とほぼ同様. $\arctan x$ の導関数は, $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$ を上手く利用せよ.

こんな風に, 逆三角関数の導関数の公式は, 微分の連鎖法則を適用すれば簡単に導き出すことができる. よって, これらの公式を暗記する必要は全く無い. その場その場で導出したほうがよほど確実で, さらには余計な暗記をせずに済み, 何より, そっちのほうが楽しいのである.

問題 17 $\arcsin(x^2)$ を微分せよ.

問題 18 $\frac{1}{\sqrt{\arctan x}}$ を微分せよ.

3.6.4 【余談】多価関数

三角関数の逆関数を考えるところで, こんなことを言った.

一般に 関数とは **1 つの値に対して 1 つの値を対応づける規則** のことを言うので, このように, 複数の値が対応づけられてしまう y を関数と呼ぶことは出来ない. よって, この y は, 逆関数として成立していない.

が, 以下のような疑問を抱いた読者がもしかしたらいるのではないだろうか.

いや, 1 つの値を決めたらたくさん値が対応して決まる関数を考えてもいいんじゃないの?

実は, そのような関数は確かに存在する. そのような関数は多価関数と呼ばれ, 主に複素関数論において頻繁に登場するのである. その例を以下に示そう.

例えば, 私達は中学校の数学で, 以下のようなことを学んだ.

-2 を 2 乗しても, 2 を 2 乗しても 4 になるから, 4 の平方根は ± 2 である.

実はこれは, 紛れもない多価関数を考えていることになる.

関数 $f(x)$ を, 任意の実数 $x(>0)$ について, その平方根を返す関数と定義すれば,

$$f(a) = \pm\sqrt{a}.$$

となり, $f(x)$ が 1 つの独立変数 a に対し, 複数の関数値 $\pm\sqrt{a}$ を対応づける関数であることが分かる.

また, 複素関数論を学べば, 3 乗根, 4 乗根, ... といった一般の n 乗根を返す関数についても, やはり多価関数となっていることが分かる (一般に, n 乗根を返す関数は, n 価関数, すなわち, 1 つの値に対して n 個の関数値を対応づけるような関数となる).

が, 少なくとも実関数論においては関数とは「1 つの値に 1 つの関数値が対応づけられる規則 (単射写像という)」として定義されるものなので, 多価関数を考慮することはまず無いと言って良い.

3.7 指数関数, Napier 数

a ($a > 0, a \neq 1$) を底とした指数関数 (exponential function) を, 以下のように定義する.

definition : 指数関数

$$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

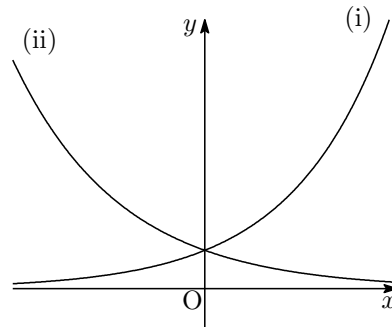
の形で表される x の関数 y を, a を底とする指数関数 (exponential function) という.

指数関数は, 底の値によって, 2つに分類される.

指数関数の底による分類

$y = a^x$ において,

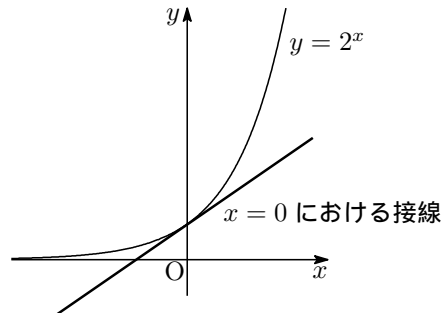
- (i) $a > 1$ の場合, $y = a^x$ は単調増加関数となる.
- (ii) $a < 1$ の場合, $y = a^x$ は単調減少関数となる.



3.7.1 指数関数の底と, $x = 0$ での微分係数

指数関数の底としては, 様々な数を採用することができる. それは, $a > 0, a \neq 1$ という条件を満たしさえすれば, 自然数でも, 有理数でも, 実数でも構わない. そして, 指数関数の底として最も重要であり, かつ, 数学においても非常に大きな役割を果たす定数として, Napier 数 (Napier's constant) がある.

まず, $y = 2^x$ という指数関数を考えよう. $y = 2^x$ のグラフの, $x = 0$ における接線を考える.



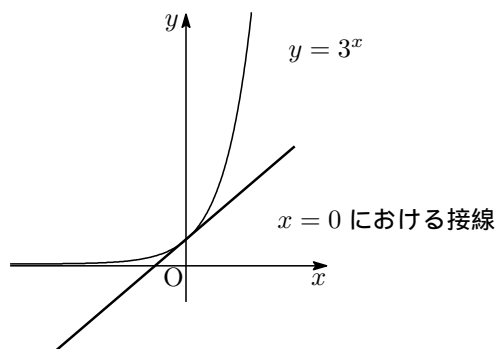
さて、この接線の傾き（すなわち、 $x = 0$ における微分係数）はどの程度の値なのだろうか。実はこの接線の傾きは、1 よりも少しだけ小さい値となることが知られている。

$y = 2^x$ の $x = 0$ における微分係数

$y = 2^x$ において、

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} < 1$$

では、次に $y = 3^x$ についても同様のことを考えよう。



この場合、 $x = 0$ における接線の傾き（微分係数）は、1 よりも少しだけ大きな値となることが知られている。

$y = 3^x$ の $x = 0$ における微分係数

$y = 3^x$ において、

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} > 1$$

では、 $x = 0$ における微分係数がちょうど 1 になるような指数関数の底とは、一体どのような値なのだろうか？ 実はその数こそが、Napier 数と呼ばれる、最も重要な定数なのである。

definition : Napier 数

指数関数 $y = a^x$ において、 $x = 0$ における微分係数が 1 となるように設定した底の値を Napier 数と呼ぶ。Napier 数は通常 e と表記し、以下のような値となる。

$$e = 2.71828 \dots$$

さて、底として Napier 数 e を採用した指数関数 $y = e^x$ を考えよう。これからはもの凄く頻繁に、底が e である指数関数 $y = e^x$ を扱うことになる。

まず、微分係数の定義を用いて、 $x = 0$ における $y = e^x$ の微分係数を表現してみよう。微分係数とは、以下のように定義される量であった。

復習：微分係数

連続かつ滑らかな関数 $f(x)$ について、

$$\frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

を、 $x = x_0$ における $f(x)$ の微分係数 (derivative) という。

$f'(x_0)$ は、 $x = x_0$ における、 $f(x)$ の接線の傾きを表す。

この定義によって $x = 0$ における $y = e^x$ の微分係数を求めよう。

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{0+\Delta x} - e^0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}. \end{aligned}$$

ところで、 $x = 0$ における $y = e^x$ の微分係数は 1 に等しい (e は、こうなるように決めた数である) ので、以下の等式が成立する。これは、指数関数の重要な極限公式である。

theorem : Napier 数の極限公式 (1)

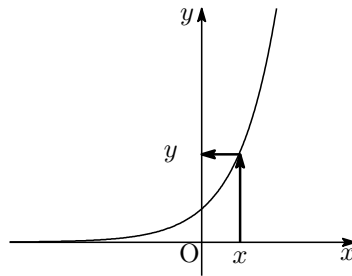
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

(Δx を使うと少し見づらいので、 h を使って書いた)

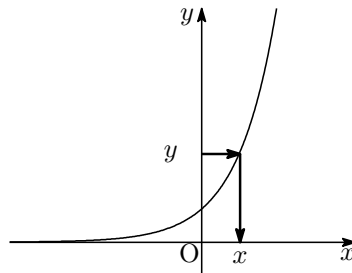
3.8 対数関数

指数関数の重要な極限公式を導いたところで、指数関数の逆関数について考えよう。

指数関数は $y = a^x$ 、任意の x に対して、対応する y の値が必ず 1 つ定まる。



また、グラフを見ると明らかであるように、任意の y に対しても、対応する x の値が必ず 1 つ定まる。



よって、指数関数 $y = a^x$ には、逆関数が存在することが分かる。

$$y = a^x \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \underbrace{x = a^y}_{y = \log_a x \text{ と定義}}$$

指数関数 $y = a^x$ の逆関数を、 $y = \log_a x$ と書き、底を a とする対数関数 (logarithm function) と呼ぶ。

definition : 対数関数

指数関数 $y = a^x$ の逆関数。すなわち、 $x = a^y$ における y のことを、底を a とした対数関数と呼び、以下のように表記することにする。

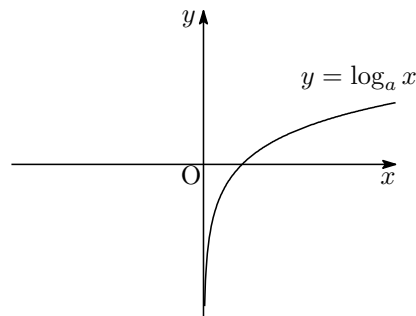
$$y = \log_a x.$$

また、特に、Napier 数 e を底とした対数関数を自然対数関数と呼ぶ。

$$y = \log_e x.$$

自然対数は、通常底を省略して $\log x$ と書く。また、しばしば $\ln x$ と表記されることもある。このことから、 e は、自然対数の底とも呼ばれる。

指数関数の逆関数とはすなわち、ある指数関数の値 $x (= a^y)$ が与えられたときに、そのときの y の値を返すような関数のことである。このことから、指数関数の逆関数のグラフは、以下のような形になる。



このグラフより、以下の事実が容易に確認できる。

- 対数関数 $y = \log_a x$ は、 $x > 0$ という条件を必要とする。
- $y(0) = \log_a 0 = -\infty$ である。

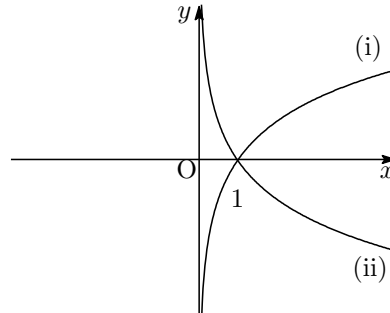
対数関数は、底の値によって 2 種類に分類することができる。

(指数関数も、底の値によって 2 種類に分類することができた。このことから、対数関数と指数関数の重要な共通点が見えてくる。実際に逆関数同士ということもあり、切っても切り離せない関係である。)

対数関数の底による分類

$y = \log_a x$ において,

- (i) $a > 1$ の場合, $y = \log_a x$ は単調増加関数となる.
- (ii) $0 < a < 1$ の場合, $y = \log_a x$ は単調減少関数となる.



対数関数についての基本的な性質や計算公式については, ここでの説明は省略することにする. 基礎数学の教科書を見れば必ず載っているのだから, 必要に応じて参照してほしい.

3.9 極限公式の導出

指数関数, 対数関数を定義し終えたところで, 微分法において最も重要な役割を果たす, Napier 数 e に関する極限公式を, 連鎖のように導出することにしよう. この導出過程は非常に重要で面白いので, 是非とも導出ができるようにマスターしておこう.

3.9.1 スタートは Napier 数の極限公式 (1)

e に関する極限公式として, 先程既に 1 つの等式が得られていた.

theorem : Napier 数の極限公式 (1)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

この等式は, $y = e^x$ の, $x = 0$ における微分係数が 1 に等しいという事実 (e の定義) を使えば, 簡単に導き出すことができる. そして, 実はこの 1 つの式を使えば, 様々な重要な極限公式を得られるのである.

3.9.2 Napier 数の極限公式 (2) の導出

まず, スタートは Napier 数の極限公式 (1) である.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

今, $e^h - 1 = u$ とおくと, $e^h = 1 + u$ とかける. また, $h \rightarrow 0$ のとき, $u \rightarrow 0$ である.
 $e^h = 1 + u$ より, $h = \log(1 + u)$ となり, 極限公式 (1) は以下のように書ける.

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\log(1 + u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\log(1 + u)}{u} \right)^{-1} = 1.$$

よって, 以下の関係が得られることが分かるだろう.

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\log(1 + u)}{u} = 1.$$

theorem : Napier 数の極限公式 (2)

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\log(1 + u)}{u} = 1.$$

3.9.3 Napier 数の極限公式 (3) の導出

Napier 数の極限公式 (2) において, 以下のような変形を行おう.

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\log(1 + u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \log(1 + u) = \lim_{u \rightarrow 0} \log(1 + u)^{\frac{1}{u}} = 1 = \log e.$$

この式の両辺を比較すると, 以下の結果が得られる.

$$\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e.$$

theorem : Napier 数の極限公式 (3)

$$\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e.$$

3.9.4 Napier 数の極限公式 (4) の導出

Napier 数の極限公式 (3) において, $\frac{1}{u} = v$ とおくと, $u \rightarrow 0$ のとき, $v \rightarrow \pm\infty$ となる.

$$\lim_{v \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{v} \right)^v = e.$$

theorem : Napier 数の極限公式 (4)

$$\lim_{v \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{v} \right)^v = e.$$

以上で, Napier 数の極限公式の導出は全て終了である.

比較的簡単な式変形により様々な驚くべき結果が得られることや, 極限公式 (3), (4) に見られる e のもの凄くシンプルで美しい極限表示が存在することは, まさに驚嘆すべきことではないだろうか. この一連の導出過程は, 必ずマスターしておこう. 導出過程をマスターしておけば, これらの極限公式を脈絡なく暗記する必要もないし, 何より, この極限公式の導出過程はとても楽しいはずだ.

3.10 指数関数, 対数関数の導関数

さて, それではいよいよ, 指数関数と対数関数の導関数について考えよう. まずは, 指数関数 $y = e^x$ の微分からスタートする.

3.10.1 $y = e^x$ の導関数

$f(x) = e^x$ とおき, 微分の定義式に代入しよう.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right).$$

さて, ここで, Napier 数の極限公式 (1) を思い出そう. 極限公式によると, 上式のカッコ内は 1 となる. よって,

$$f'(x) = e^x.$$

theorem : $y = e^x$ の導関数

$f(x) = e^x$ について,

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = e^x.$$

何と, Napier 数を底とする指数関数 $y = e^x$ は, 微分によって全く姿を変えないという驚くべき性質を持つことが分かった. $x = 0$ における微分係数が 1 となるように決めた指数関数の底 e は, 極限公式のみならず, 微分においても驚嘆すべき性質を表したのである.

3.10.2 $y = a^x$ の導関数

では, 底を e に限定して指数関数の導関数を導いたが, 次は一般の底を持つ指数関数の導関数についても, 頑張って導いてみよう. 実は, 微分の連鎖法則を用いると, 簡単に導出することができる.

$y = a^x$ の導関数を得るために, $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) とおき, 次のような変形を行う.

$$f(x) = a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}$$

このように, 一般の底を持つ指数関数は, 必ず $e^{(\quad)}$ の形に書ける.

あとは, $t = x \log a$ とおいて, 微分の連鎖法則を適用すると,

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dt} \frac{dt}{dx} = e^t (x \log a)' = e^{x \log a} \log a = a^x \log a.$$

theorem : $y = a^x$ の導関数

$f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) について,

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = a^x \log a.$$

3.10.3 $y = \log x$ の導関数

次は, $y = e^x$ の逆関数 $y = \log x$ の導関数を導こう.

この導出も, 微分の定義に戻る必要はなく, 非常に簡単な手順により行うことができる.

まず, $x = e^y \cdots (*)$ (当然, 常に $x > 0$ である) とおく. このとき, $y = \log x$ である. (指数の対数の関係) よって, dy/dx を求められれば, $y = \log x$ の導関数を求められたことになる. (*) の両辺を x で微分すると,

$$1 = \frac{d(e^y)}{dx} = \frac{d(e^y)}{dy} \frac{dy}{dx} = e^y \frac{dy}{dx} \quad (\text{微分の連鎖法則})$$

これを, dy/dx について解くと,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \quad (x = e^y \text{ より})$$

という結果が得られた.

theorem : $y = \log x$ の導関数

$f(x) = \log x$ ($x > 0$) について,

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{1}{x}.$$

3.10.4 $y = \log_a x$ の導関数

最後に, 一般の底を持つ対数関数 $y = \log_a x$ の導関数を求めよう. 底の変換公式を用いると,

$$y = \log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a}.$$

と書ける. あとは, 両辺を x で微分すると,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \log a}.$$

という結果が得られた.

theorem : $y = \log_a x$ の導関数

$f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1, x > 0$) について,

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{1}{x \log a}.$$

まるで極限公式が連鎖のように導かれたときのように, 導関数の公式も, $y = e^x$ の導関数をきっかけにでもしたかのように, 一気に導出することができた. しかも, $y = e^x$ の導関数を求めるときに役に立ったのは, 何と Napier 数の極限公式 (1) である. このことから, Napier 数の極限公式 (1) は, やはり様々なことの出発点となっていることが分かる. この一連の流れはとても大切であり, しかも自らの数学力を試すきっかけにもなるので, 是非マスターしておくべし.