2009/07/05　線形代数確認テスト

- 制限時間は 50 分.
- 出来たら途中でやめても OK.
- どんな点数を取っても別に問題はない. あくまでこのテストは数学力 UP が目的.

1. 行列 A の固有値と固有ベクトルの定義を書こう.
   (行列 A の固有値を λ, 固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする)

2. 次の行列の固有値を固有ベクトルを全て求めよう.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. 次の等質連立 1 次方程式が自明解以外の解を持つときの a の値を定めよう.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. A が非正則行列ならば, $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ となる $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{v} \neq 0$ が存在することを証明せよ.

5. 2 次の行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式は $\lambda^2 - \mathrm{tr}A\lambda + \det A = 0$ と表されることを証明せよ.

(ただし, $\mathrm{tr}A$ は, 行列 A の対角和, $\det A$ は行列 A の行列式を表す.)

6. 次の行列 C について, 次の問に答えよ.

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

(a) 固有値と固有ベクトルを全て求めよ.

(b) C^{-1} の固有値と固有ベクトルを全て求めよ.

(c) $C^2 + 5C - 2E$ の固有値と固有ベクトルを全て求めよ.

計算用紙

2009/07/05　線形代数確認テスト　$\boxed{\text{解答}}$

- 制限時間は 50 分.
- 出来たら途中でやめても OK.
- どんな点数を取っても別に問題はない. あくまでこのテストは数学力 UP が目的.

1. 行列 A の固有値と固有ベクトルの定義を書こう.
(行列 A の固有値を λ, 固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする)

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad \square$$

2. 次の行列の固有値を固有ベクトルを全て求めよう.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

固有方程式は $\lambda^2 - \mathrm{tr}A\lambda + \det A = 0$ なので, $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$.
これを解くと, $(\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$ となり, $\lambda = 2, 4$.

- $\lambda = 2$ について

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{11} \\ \boldsymbol{v}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列を作り, 掃き出し法を用いてこの連立方程式を解く.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \therefore v_{11} = v_{12} \text{となり, } v_{12} = t \text{ とおくと, } v_{11} = t.$$

$$\therefore \text{固有ベクトル } \boldsymbol{v}_1 \text{は} \quad \boldsymbol{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^{\forall}t \in \mathbb{R},\ t \neq 0).$$

- $\lambda = 4$ について

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{21} \\ \boldsymbol{v}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列を作り, 掃き出し法を用いてこの連立方程式を解く.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \therefore v_{21} = -v_{22} \text{となり, } v_{12} = s \text{ とおくと, } v_{11} = -s.$$

$$\therefore \text{固有ベクトル } \boldsymbol{v}_2 \text{は} \quad \boldsymbol{v}_2 = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^{\forall}s \in \mathbb{R},\ s \neq 0). \quad \square$$

3. 次の等質連立 1 次方程式が自明解以外の解を持つときの a の値を定めよう.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

等質連立 1 次方程式は, 係数行列が正則であるとき自明解のみを持ち, 非正則であるとき, 自明でない解を持つ. よって, 係数行列の行列式が 0 となるような a を定めれば良い.

係数行列を A とおき, 行列式を計算し, 0 と置くと,

$$\det A = 5a - 2a^2 = 0$$

$$\therefore 2a\left(\frac{5}{2} - a\right) = 0 \ \text{となり，} \ a = 0 \ \text{または} \ \frac{5}{2} \quad \square$$

4. A が非正則行列ならば, $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ となる $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{v} \neq 0$ が存在することを証明せよ.

条件より, $\det A = 0$ である.
$\det A = \prod_k \lambda_k$ より, A は必ず固有値 $\lambda = 0$ を持つ.
固有値には必ず固有ベクトルが対応し, 存在が保証されるので,
$\lambda = 0$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とすると, 固有値, 固有ベクトルの定義より,

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad A\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}.$$

よって, A が非正則行列ならば, $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ となる $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{v} \neq 0$ が存在する. $\square$

5. 2 次の行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式は $\lambda^2 - \mathrm{tr}A\lambda + \det A = 0$ と表されることを証明せよ.

(ただし, $\mathrm{tr}A$ は, 行列 A の対角和, $\det A$ は行列 A の行列式を表す.)

固有方程式 $|A - \lambda E| = 0$ を計算する.

$$|A - \lambda E| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{左辺} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - \mathrm{tr}A\ \lambda + \det A.$$

$$\therefore \text{固有方程式は} \lambda^2 - \mathrm{tr}A\lambda + \det A = 0 \text{ と表せる.} \ \square$$

6. 次の行列 C について, 次の問に答えよ.

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

(a) 固有値と固有ベクトルを全て求めよ.

(b) C^{-1} の固有値と固有ベクトルを全て求めよ.

(c) $C^2 + 5C - 2E$ の固有値と固有ベクトルを全て求めよ.

(a) 固有方程式を解く.

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 & -7 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 5 & -3 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{左辺} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & -7 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1-\lambda & -3 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & -6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) \quad \therefore \lambda = -1, 1, 2.$$

- $\lambda = -1$ について,

$$(C - \lambda E)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 7 & -3 & -7 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{11} \\ \boldsymbol{v}_{12} \\ \boldsymbol{v}_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列を作り, 掃き出し法を用いてこの連立方程式を解く.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -3 & -7 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -5 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -7 & 0 \\ 5 & -3 & -5 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore v_{11} = v_{13},\ v_{12} = 0$ となり, $v_{13} = t$ とおくと, $v_{11} = t$.

$\therefore$ 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$は $\boldsymbol{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^{\forall}t \in \mathbb{R},\ t \neq 0)$.

- $\lambda = 1$ について,

$$(C - \lambda E)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 5 & -3 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{21} \\ \boldsymbol{v}_{22} \\ \boldsymbol{v}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列を作り, 掃き出し法を用いてこの連立方程式を解く.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & -7 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -7 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore -v_{21}+v_{22}+v_{23}=0, v_{22}=v_{23}$ となり，$v_{23}=s$ とおくと, $v_{22}=s.\ \ v_{21}=2s.$

$\therefore$ 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_2$は $\boldsymbol{v}_2 = s\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\quad ({}^\forall s\in\mathbb{R},\ s\neq 0).$

- $\lambda = 2$ について,

$$(C-\lambda E)\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{0} \ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}4 & -3 & -7\\ -1 & 0 & 1\\ 5 & -3 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_{31}\\ \boldsymbol{v}_{32}\\ \boldsymbol{v}_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

拡大係数行列を作り, 掃き出し法を用いてこの連立方程式を解く.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4 & -3 & -7 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 5 & -3 & -8 & 0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 0 & 1 & 0\\ 4 & -3 & -7 & 0\\ 5 & -3 & -8 & 0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -3 & 0\\ 0 & -3 & -3 & 0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$\therefore v_{32}=-v_{33}, v_{31}=v_{33}$ となり，$v_{33}=u$ とおくと, $v_{31}=u, v_{32}=-u.$

$\therefore$ 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_3$は $\boldsymbol{v}_3 = u\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\quad ({}^\forall u\in\mathbb{R},\ u\neq 0).\quad \square$

(b) C の固有値を λ としたとき, 逆行列は固有値 $1/\lambda$ を持ち, 固有ベクトルは変わらない.
よって, C の固有値は $-1,1,2$ より, 逆行列の固有値は $-1,1,1/2$ である.
対応する固有ベクトルは, それぞれ順に,

$$\boldsymbol{v}_1=t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\quad({}^\forall t\in\mathbb{R},\ t\neq 0),\ \boldsymbol{v}_2=s\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\quad({}^\forall s\in\mathbb{R},\ s\neq 0),\ \boldsymbol{v}_3=u\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\quad({}^\forall u\in\mathbb{R},\ u\neq 0)\quad\square$$

(c) Frobenius の定理より, C の固有値 λ に対して, $C^2+5C-2E$ は, 固有値 $\lambda^2+5\lambda-2$ を持つ.
よって,C の固有値は $-1,1,2$ より, $C^2+5C-2E$ の固有値は, $-6,4,12$ である.
また, Frobenius の定理によると固有ベクトルは変わらないので, 固有ベクトルはそれぞれ順に,

$$\boldsymbol{v}_1=t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\quad({}^\forall t\in\mathbb{R},\ t\neq 0),\ \boldsymbol{v}_2=s\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\quad({}^\forall s\in\mathbb{R},\ s\neq 0),\ \boldsymbol{v}_3=u\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\quad({}^\forall u\in\mathbb{R},\ u\neq 0)\quad\square$$