# Imag$i$nary Number

― 想像された数が全てを語る ―

Presented by Minami

Quad Erat Demonstrandum? : http://ameblo.jp/dwave/

# 目 次

## 0.1 虚数とは何か

▷ **虚数** (Imaginary number)
二乗すると-1 になる数. 実数は二乗すると必ず正の値をとるため, 虚数とは**人為的に定義**された数である. 虚数は次のように表す.

$$i = \sqrt{-1}$$

つまり, 数式においては $i^2 = -1$ として扱う.

私たちが数学の授業で説明されたことはこれだけである. この定義のみを知っていれば, 確かに現実の問題には形式的に対応できるからだ.

だが, これだけを説明されても, はっきりいって「ああ, そうなんですか」としか言いようがない. 疑問を持つ余地もなければ, 感動をする余地もない. あまりにも無味乾燥すぎないだろうか.

考えてもみてほしい. **現実世界には存在しない**数, 虚数. そんなものを数学という学問に導入するために, ドラマ, 論争, 迷いが無かった訳がないと思わないだろうか. それらを一切省いてしまうから, 授業の数学はつまらないのである. この際折角だから, 授業でやらない部分を垣間見てみよう.
人間が「想像した数」は一体, どのようなものなのだろうか. そして, **いかに重要なものなのか**. 授業では見えない**虚数の本当の姿**を, ほんの少しだけ垣間見てほしい.

## 0.2 これは一体どうしたことか？

結果的に数学史上にもの凄く大きな変革をもたらすきっかけとなった「ある問題」は, **2次方程式** (quadratic equation) **の一般解法**の研究においてついに姿を現した.

まずは一般の2次方程式について考えてみよう.
一般の2次方程式を次のように表し, 話を進めて行く.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

この方程式の解が一体どのように与えられるか, 覚えているだろうか.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (\text{ただし}, D = b^2 - 4ac)$$

これを, **2次方程式の解の公式**といった. 証明は割愛するが, 2次方程式の解は, 形式的にこの公式に係数を当てはめるだけで求めることができる.

さて, 分子の根号の中に注目しよう. 根号の中身 $D = b^2 - 4ac$ を, 2次方程式の**判別式** (discriminant) ということは当然知っているだろう. 数学者は, この解の公式や判別式を見て気づいてしまった.

「**係数の選び方によっては,**
**判別式の値が負になってしまうことがある**.」

具体的に数式を用いてこの事実を表すと,
$D = b^2 - 4ac < 0$ となる場合なのだから,

$$b^2 < 4ac$$

となるときに, 判別式の値が負となることがわかる. 根号の中の判別式が負になる. つまり, 根号の中身が負の値になってしまうということである.

根号ーここでは例として $\sqrt{a}$ を扱うーとは, 二乗すると $a$ となる数を表す. 実数だけを考えれば, 任意の値を二乗すれば必ず正の値となることは自明だろう. ところが, 根号の中身が負となるということは, 二乗すると負の値を取る「何か」が姿を現したということである. 少なくとも, 実数ではないことは明らかだ.

## 0.3 運命の選択

数学者の前に突如として姿を現した「正体不明の数」を一体どのように処理すべきか, 数学者は「迷ってしまった」. 数学者の前には, **重大な二択問題**がいきなり突きつけられたのである.

1. 判別式 $D$ が負となったとき, その2次方程式には**解がない**とする.
   ⇒ **現実**を重視した選択.
   （存在しない数を導入すべきではない）

2. 判別式 $D$ が負となったときのために, 2乗して $-1$ となる数を人為的に導入し,
   **全ての2次方程式が解をもつ**とする.
   ⇒ **美しさ**を重視した選択.
   （「解なし」は数学的に美しくない）

この重大な問題を突きつけられた数学者は, 完全に路頭に迷った.「現実を取るか, 理想を取るか」· · · あまりにも根本的な葛藤の中に投げ出された数学者たちは, **数千年もの間この問題を解決できなかった**.

## 0.4　変革 〜タルタリアの悲劇〜

重大な葛藤を数千年にもわたって続けた数学史は, １６世紀になってついに変革を迎える. きっかけは, 今まで長らくにわたって発見されることのなかった**３次方程式の一般解法の発見**であった.

３次方程式の一般解法を発見したのは, **タルタリア** (Tartaglia) だったが, 一番最初に発表したのは**カルダノ** (Cardano) であった. 実は３次方程式の一般解法がカルダノによって世間に発表されるまでの経緯には面白いエピソードがある.

### 0.4.1　タルタリアの悲劇

３次方程式の一般解法をついに発見したタルタリアはある日, カルダノから次のような頼みを受けた.

**「なあなあ, 誰にも言わないからさ！**
**３次方程式の解法教えてくれよ！**
**タルタリア様！タルタリア大先生！**
**一生のお願いです！教えてください！」**

そしてやさしいタルタリアはそれを聞き, タルタリアに対して次のように答えた.

**「仕方がない, 教えて差し上げます · · ·**
**あくまで自分だけで使ってくださいね,**
**くれぐれも他言はしないでください.**
**発見者の私が世間にこの解法を発表します.」**

カルダノはそれを聞き, おそらく目を輝かせてこういったことだろう.

**「ありがとう！この恩は一生忘れないぜ！」**

そしてしばらくして, カルダノは自著において, ３次方程式の一般解法を自らの発見として発表したのであった. タルタリアの猛抗議も後の祭りだったという.

### 0.4.2　運命がついに定まる時

タルタリアによって発見された３次方程式の一般解法は, 大まかにいえば以下の手順より成立している.

３次方程式
↓
判別式
↓
解

この解法には, 当時としては驚くべき事実を含んでいた. **３次方程式がどんな解をもつ場合でも (実数解のみをもつ場合でも), 判別式の段階で「二乗すると負になる数」が侵入してしまう**のである.

２次方程式の議論をしていたときのことを思いだそう. ２次方程式の場合は, 根号の中身が負となったとき**のみ**を「**解なし**」として切り捨てるということが可能だった. ところが, ３次方程式を解く上では, どんな場合でも必ず「二乗すると負になる数」を経由しなければ解にはたどり着けないのである.

数千年にもわたる葛藤に**終止符**が打たれようとしていた. 数学者たちは,「二乗すると負になる数」を仕方なくも**導入せざるを得なくなったのである**.
こうして１６世紀, ついに**虚数が誕生**したのだ.

### 0.4.3　人として軸がぶれている

ちなみに, タルタリアにより発見され, カルダノにより公表された３次方程式の一般解法は, 現在では**カルダノの公式** (Cardano's formula) と呼ばれている. タルタリアはあまりにも報われないと思わないだろうか. きっとタルタリアは,「カルダノさえ · · · カルダノさえいなければ · · ·！」と, 何度も怒りに身を震わせたことだろう.

## 0.5　「数」の拡張 〜終着点〜

こうして, 数学史上に残る大変革「二乗して負となる数の導入」が数千年の時間を超えてついに現実となった. 数学者はそれを**虚数**と名付け, アルファベッ

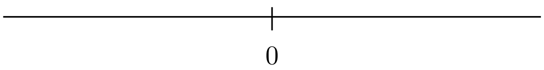
トの $i$ を使って表した.

$$i^2 = -1$$

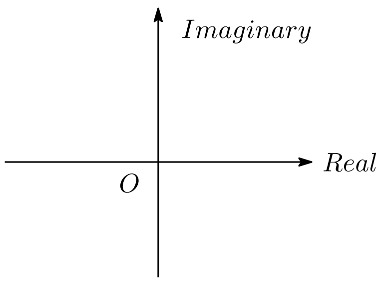
この奇妙な数式が, 遂に姿を現したのである.

### 0.5.1　無限が無限に広がって行く

さてここで**数直線 (Number line)** を考えよう. 虚数が導入される以前は当然実数しか考えられておらず, 数直線は**実数軸の一本だけ**で事が足りていた.

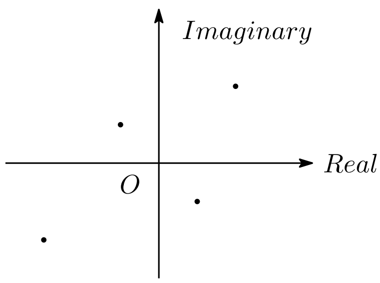



この時点での数直線は当然**１次元**であった. が, 虚数という新概念が導入されたからには, 当然話が変わってくる. **実数でない数を実数軸上で表現できるわけがない**のである. そこで, かの有名な**ガウス (Gauss)** は, 実数軸とちょうど 0 の点 (原点) と垂直に交わらせる形で, 虚数を表す軸を新たに考えた.




この拡張により, １次元だった数直線が２次元となった. **ガウス平面 (Gaussian plane)** の誕生である.

注目すべきは, ただ「虚数軸」が一本増えただけではないことである. 実数軸と虚数軸が交わり, 平面を作った. つまり, **実数と虚数は共存している**のである.




上図に, 座標のようにプロットされている点が表す数を**複素数 (Complex number)** と呼ぶ. 複素数は実数軸側の値も持っていれば, 虚数軸側の値も持っている. これを表現すると, 次のような形となる.

$$a + bi$$

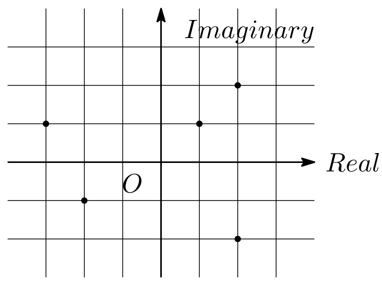
$a$ は実数軸側の値,$b$ は虚数軸側の値である. 実数と虚数は相反するものではなく, ガウス平面を通じて, 複素数として見事に共存している.

**ちなみに**

$$2$$

３秒以内に答えてほしい. ２は複素数だろうか? 「複素数ではない」と答える人が多いであろう. 実は**２は複素数**である. 複素数とは, 虚数を含む数のみを指すのではない. なぜなら, 問題の２という数は, 虚部が 0 の複素数と考えることができるからである. 複素数は, 実数と虚数が共存している数である. 決して虚数が含まれることが前提となっているわけではない.

また, ガウス平面を実数軸側の整数値, 虚数軸側の整数値によって作られる格子状に切り刻んでみる.



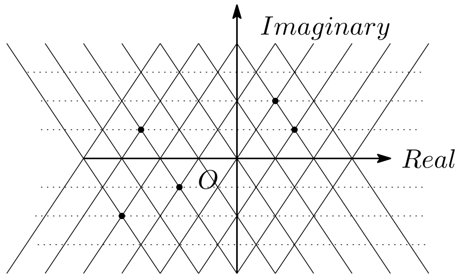

この格子のちょうど「交わる点」に位置する複素数一つまり,$a, b$ がともに整数値をとる複素数一のことを**ガウス整数 (Gaussian integer)** という.

また, ガウスの弟子であった**アイゼンシュタイン (Eisenstein)** は, 格子の区切りを正三角形状に区切ることを考えた. この場合に正三角形の格子点に位置する数を**アイゼンシュタイン整数 (Eisenstein integer)** という. アイゼンシュタイン整数に関しては話がややこやしくなるのであまり説明しないが,
複素数の一種であり, 次のように表される.

$$a + b\omega$$

もちろん $a, b$ は整数であり,$\omega$ は**１の三乗根**である.

$$\omega = \frac{\sqrt{3}\,i + 1}{2}$$




このようにして, 虚数は瞬く間にもの凄いスピードで拡張されていった. その拡張は**複素関数論**や, 物理学における**量子力学**などにまで及んで行くのである.

## 0.6 奇才が生んだ至宝

さらに, 虚数の導入は数学的に思わぬ進歩をもたらした. 虚数を仲立ちとして, 全く関わりがないと思われていた「ふたつのもの」の間に隠されていた**重大な関係**が浮き彫りになったのである.

史上最大の数学家と呼ばれる, **オイラー (Euler)** は, まさに数学史上どころか人類史上に残る途轍もない発見をした. 彼は**ネイピア数 (Napier's constant)** の指数部分に虚数を入れることにより, まさに「重大な」結果を得たのである.

オイラーが行った操作は, 次のようなものであった.

$$e^{ix}$$

このあっけない, 数式と呼ぶのもためらってしまうようなたった３つのアルファベットで出来ている式を, オイラーは様々な計算により次のように変形することに見事に成功したのである.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

なんと, オイラー以前には全く何の関係もないと思われていた**指数関数と三角関数が, 虚数を仲立ちにして見事に繋がる**ということが判明したのである. さらに,$x$ に $\pi$ を代入すると, まるで宝石のような鮮やかで, 神秘的で, 美しい. そんな, まるで神が関与したとしか思えないほどの数式が見事に姿を現すのである.

$$e^{i\pi} = -1$$

ネイピア数 $e$, 虚数単位 $i$, 円周率 $\pi$. 数学的には非常に重大な意味をもつ３つの数が. しかも, 全く相互関係がないと思われていたこの３つの数が, 虚数を仲立ちにするように結びつき,$-1$ というあり得ないほどに簡潔な結果を導き出すのだ. これを奇跡と言わずに一体なんと言えば良いのだろうか.

**まるで人間が呼吸をするかのように,**
**鷲が空を舞うかのように, オイラーは計算した.**

これは非常に有名な文である. オイラーが残したものが, 現在でも確かに数学という学問の中で脈々と生き続けているのは疑う余地のない事実である.

## 0.7 $i$ の世界

科学者たちは, 遠い昔から長きにわたって, 次の問題の答えがわからずにいた.

「光とは何か？」

そして, 科学者の間で有力なふたつの説が生まれた.

1. 光とは**粒子 (Particle)** である.
2. 光とは**波 (Wave)** である.

そして２０世紀初頭, **究極の学問**が誕生した. 物質の真の姿をただひたすらに追求するその学問は, **量子力学**と呼ばれる. 量子力学は, この難問の答えを見事に判明させたのである. その答えはまさに驚くべきものであり, 常識外れの途轍もないものであった. それが, 以下の答えである.

**光は, 粒子でもあり, 波でもある.**
**また, 物質も, 粒子でもあり, 波でもある.**

科学者たちはさぞ驚いたことだろう. 二分化していた両方の説が, 実はどちらも正解であったのだから. 意表を付かれるとはまさにこのことだろう.

そしてなんと, 物質も光と同じく, **粒子であり, 波である**というのだ. もはや, 完全に常識を越えた, 人間の想像が及ぶ世界ではないことがわかるだろう. 本当に途轍もない学問なのだ.

粒子であり, 波でもあるものを**量子**という. 粒子であり, 波であるということは, 言い換えれば, **単純な粒子でもなければ, 単純な波でもない**とも言える.

物理学者 ニールス・ボーアはこう言った.

**量子論によってショックを受けない人は**
**それを理解していないのだ.**

### 0.7.1 ミクロを支配する方程式 〜シュレーディンガー方程式〜

量子力学の根幹を成す基本方程式は, **シュレーディンガー** (Schrödinger) によって発見された方程式, **シュレーディンガー方程式** (Schrödinger equation) である. この方程式は**ミクロの世界を支配する**, 量子力学においては絶対必要不可欠な重要な式だ.

$$i\hbar\dot{\psi} = H\psi$$

これが, シュレーディンガー方程式である.

$\hbar$：プランク定数を $2\pi$ で割ったもの.
⇒ 物理学で最も重要な定数のひとつ.

H：ハミルトニアン
⇒ **ハミルトン** (Hamilton) が定義.
エネルギーに関連している量.

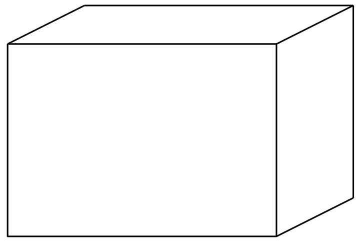
$\psi$：波動関数
⇒ 粒子であり波であるものを表す関数.

実はこのシュレーディンガー方程式からは, 非常に面白く, 不思議な**「量子力学的事実」**を導き出すことができる.

### 0.7.2 シュレーディンガーの猫 〜数式が哲学を変える〜

シュレーディンガー方程式から導かれる非常に不思議な論理的結論は, 現在では**シュレーディンガーの猫**と呼ばれ, とても有名な話となっている.

いまあなたの目の前にひとつの箱があるとしよう. そしてその中には, **核分裂をする放射性物質**と, **核分裂を検出する装置**, **毒ガス**. そして, **核分裂検出装置が核分裂を検知すると毒ガスが発生する装置**と**猫**が入っている.



箱の中の核分裂検出装置が放射性物質が核分裂することを検出すると, 毒ガス発生装置が毒ガスを発生させ, 猫は死ぬ. このようなストーリーである.

では, 箱を開ける前, つまり**箱の外から見た放射性物質**は一体どのような状態にあるのだろう. 実は, 量子力学的に考えると, 以下の答えが得られるのだ.

**放射性物質は, 核分裂をしている状態と,**
**していない状態の, 中間の状態である.**

さて, 訳の分からないことになった. そもそも両方の状態の中間などあり得るわけがないのだ. 放射性物質は核分裂をしているか, していないか, どちらかであることは常識的に考えても明らかなのである. これは一体どういうことなのだろうか.

この事実から, 当然次のような結論が得られる.

**猫は, 死んでもいないし生きてもいない.**

私たち人間の感覚でいえば, **箱を開けるまで, 猫が生きているか死んでいるかはわからない. いつのまにか猫は死んでいて, 箱を開けたときに死んだ状態を観測する.** という考え方が一般的である.

ところが, 量子力学的に考えると話は変わってくる. シュレーディンガー方程式が語るところによると, **箱を開ける前は, 猫は生と死の中間の状態であり, 箱を開けた瞬間に, 生, または死という状態へと変化する**という, 何とも常識外れな結論が導き出されるのだ.

この結果は,「**観測によって物の状態が決まる**」という, 極めて重大な答えを残している. ものの状態とは

全く関係がないと考えられていた**観測**という行為が,**実は物の状態自身を決定していた**という今までの論理が完全にひっくり返った結論が, 量子力学によって導き出されたのである. これは数学, 物理のみではない. **哲学にまで大きなショックを与えた**といわれている. 恐るべし, シュレーディンガー. そして, 量子力学.

### 0.7.3 すべてを創るものが, ここにある

さて, シュレーディンガー方程式の左辺を見てみよう. なんと, 生のままの形で堂々と虚数が掛かっているではないか.
ここからもわかるように**波動関数は虚数**なのだ.

さあ, 大変なことになった. 波動関数は量子を表す関数である. そして, 量子は光の, 物質の. もっと大げさにいえば, **この世の全てのものの構成要素**なのだ.

我々は信じられない結論を得てしまった.

すべてのものは虚数でできている

. . . 最初は, 2次方程式を解くために, 仕方なく導入した数だった. が, まさかその数がこの世の全てを作っているとは一体誰が想像しただろう. そして, もし, 数千年前の数学者が虚数を導入しなかったとしたら, 現代は一体どのような世界になっていたのだろう. 今, 虚数なしでは全く成り立たない学問は数多く存在しているのだ. 量子力学はまさにその代表例である.

2次方程式の解を得るということの先にこれほどまでに壮大で神秘的な世界が待ち構えていると, 誰が想像したのだろう. そして, 一体数学とは何なのだろう. 理学とは何なのだろう.

もはや, 世界は虚数で支えられていると言っても良いのである. にわかには信じがたい結論だが, これはれっきとして正しい結論なのだ.

## 0.8 旅は終わらない

これほどまでに重大な役割を果たす虚数を, ただ,「二乗すると-1 になる数」としてだけ認識していることがあまりに**勿体ない**ということが実感できただろうか. 今回の話題は, 虚数や実数が織りなす神秘の**一掬い**に過ぎない. 興味が沸いたという人は是非とも自ら調べてみてはどうだろう. 心を奪われる世界が目の前に立ちはだかってくるのは間違いないだろう.

▷ 参考文献

『虚数の情緒ー中学生からの全方位独学法』
著者: 吉田 武
出版社: 東海大学出版会 (2000/03)
ISBN-10: 4486014855
ISBN-13: 978-4486014850

『ゼロから学ぶ 物理の１、２、３』
著者: 竹内 薫
出版社: 講談社 (2002/12)
ISBN-10: 4061546635
ISBN-13: 978-4061546639