線形代数 レクチャーノート

Presented by Minami

http://ameblo.jp/dwave/

目 次

第1章　固有値, 固有ベクトル, 固有空間

線形代数において, 非常にキーポイントとなるのが, **固有値 (eigen value), 固有ベクトル (eigen vector), 固有空間 (eigen space)** である. これらについては, 編入問題にも頻出なので, 必ずマスターしておこう.

1.1　固有値, 固有ベクトル

1.1.1　固有値, 固有ベクトルとは何か

▷ 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ について, 行列 A を**作用させる**ことは, ベクトル $\boldsymbol{v}$ を行列 A によって**変換する**ということに相当する.（当然, A による変換によって, ベクトルは向きが変わるかもしれないし, 長さも変わるかもしれない. または, 変化しないということも, 当然あるかもしれない.）

$$A\boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\textbf{変換後のベクトル}}$$

▷ 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ を, スカラー倍（λ 倍）すると, ベクトルは**向きが変わらず, その長さだけが変化**する.

$$\lambda\boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\textbf{長さだけが変わったベクトル}}$$

▷ では, もし, 行列 A による変換によって, あるベクトル $\boldsymbol{v}$ の長さだけが変わる場合 (λ 倍された場合),
その関係を数式で表すと $\cdots$

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

この数式における λ を, 行列 A の**固有値 (eigen value)** といい, $\boldsymbol{v}$ を, 行列 A の**固有ベクトル (eigen vector)** という. 固有値と固有ベクトルは, 今後の線形代数において非常に重要な役割を演じることとなる.

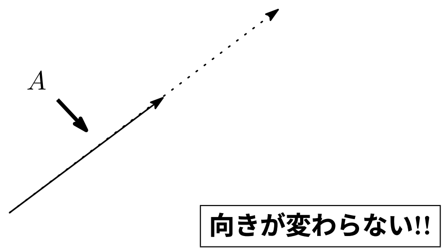
1.1.2　固有値と固有ベクトルの図形的な意味

固有値, 固有ベクトルは, 一体, 図形的にはどのような意味を持っているのだろうか. その意味について, これから解説する.

▷ 世の中には, 色々なベクトルがある. 水平線の彼方まで伸びているベクトルもあれば, 水分子の片方の水素原子を始点として, もう片方の水素原子を指しているような, むちゃくちゃ小さなベクトルも, さらには, 向きも長さも無いベクトルだって, とにかく, 色々なベクトルがある.

そして, ある行列 A によってそれらを変換すれば, 世の中の色々なベクトルは, 魔法をかけられたかのように突然姿を変える. 時計の短針程度の長さだったベクトルが, 地球の裏側を指すくらいに大きなベクトルとなるかもしれないし, 冥王星まで伸びていたはずのベクトルが, あろうことか手の平サイズになってしまうことも, あるのかもしれない.

そして当然, 世の中の多種多様なベクトルの中には, **行列 A の変換によって, 向きが変わらず, 長さだけが変わる**ベクトルも当然存在するはずである. それこそが, 行列 A の**固有ベクトル**である.
固有ベクトルを行列 A によって変換すると, 長さだけが変化する. すなわち, **向きが変わらず, 単純に伸縮する**のである. これは, **スカラー倍**と全く同じである.

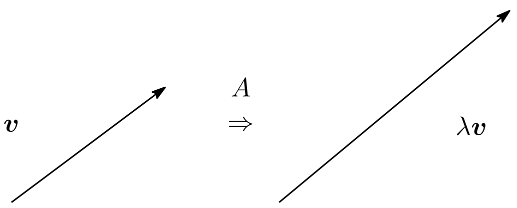


さて, 行列 A による変換により, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ は, 向きが変わらず, 長さだけが変化するということが分かった. 長さだけが変化するということは, 何らかのスカラー（実数）λ が存在し, 次のような数式が成り立つということである.

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

(A の変換により, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ は, 長さがλ倍される)

この λ を, 行列 A の**固有値** **(eigen value)** という. 固有値は, すなわち, **行列 A による変換における, 固有ベクトルの長さの変化率**を表す. 図に示すと, 次のような関係である.



向きが変わらず, 長さが λ 倍

行列 A には, 対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ が**必ず存在**する. 固有ベクトルは, 言ってみれば, 行列 A に**選ばれし者**なのである. そして, 私達はこれから, 行列 A により選ばれし者を探す旅に出るのである.

definition : 行列 A の固有値, 固有ベクトルの定義

任意の行列 A について,

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

を満たす λ を, A の**固有値** **(eigen value)** といい, $\boldsymbol{v}$ を, A の**固有ベクトル** **(eigen vector)** という.

1.1.3　固有方程式の導出

というわけで, 行列 A の固有値, 固有ベクトルを定義できたわけだが,「固有値はこういうもんで, 固有ベクトルはこういうもんだ.」と, 知っているだけではどうにもならない. 私達はそれを求める方法を知らなければいけないのである.

これから固有値を求める方法を考えて行くが, 是非とも「論理を追いながら」理解を進めてほしい. たしかに, 解き方を暗記していれば, 問題は解けるのかもしれない. が, それでは, ちょっとひねった問題を出されたらもうお手上げ状態になってしまうし, そもそも, **そんな暗記作戦は, 数学ではない**のである.

では早速, **固有値と固有ベクトルの定義式**からスタートしよう.

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

右辺を左辺に移項すると, 以下のように変形できる.

$$A\boldsymbol{v} - \lambda\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

$$(A - \lambda E)\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \quad \cdots \quad (*)$$

※ λに E (単位行列) がくっついたのは, E をくっつけないと, (行列) – (スカラー) になってしまうから.

ここで, 例として,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

の場合を考えよう. 上式は, 以下のように変形できる.

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

このように, 実は式 $(*)$ は, **連立方程式**なのである.
さて, この連立方程式について, じっくりと考えてみよう.

等質連立 1 次方程式

右辺がゼロベクトルから成る連立方程式. すなわち,

$$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \quad (A : \text{係数行列})$$

を, **等質連立 1 次方程式**という. この形の連立方程式は, **非常に重要**である.

1. もし, A が**正則行列 (regular matrix)** なら $\cdots$
   (a) $|A| \neq 0$ より A^{-1} が存在するので, 両辺に左から A^{-1} をかける.
   $$\boldsymbol{v} = A^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}.$$
   (b) よって, 連立方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ は, 解として, **$\boldsymbol{0}$ のみを持つ**.
   これらの解のことを, **自明な解 (trivial solution)** という.

2. もし, A が**非正則行列 (singular matrix)** なら $\cdots$

   (a) $|A| = 0$ より,A^{-1} は, 存在しない .

   (b) このとき, 連立方程式は, **自明な解以外の解を持つ!!**

▷ では, 固有値と固有ベクトルの定義式から導いた連立方程式

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

について, 係数行列 $(A - \lambda E)$ が**正則な場合, 非正則な場合**に分けて考えてみよう.

1. $A - \lambda E$ **が正則行列の場合**

   ⇒ つまり, $|A - \lambda E| \neq 0$ の場合.

   $|A - \lambda E| \neq 0$ より, 両辺に左から $|A - \lambda E|^{-1}$ をかける.

   $$\boldsymbol{v} = |A - \lambda E|^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{固有ベクトル } \boldsymbol{v} \text{ は, ゼロベクトルのみ!!}}$$

   ゼロベクトルは, A による変換によって, やはり**ゼロベクトルに変換される**.
   確かにまあ, 向きは変わっていないと言って良いので, ゼロベクトルは固有ベクトルの条件を満たす. が, ゼロベクトルが固有ベクトルの条件を満たすいうことは, ハッキリ言って自明なことである. 言ってしまえば, ゼロベクトルは, 固有ベクトルだなんてわざわざ呼ぶまでもないくらいなのである. よって, 以下のように約束をすることにする.

   ゼロベクトル $\mathbf{0}$ は, **固有ベクトル**ではない.

   よって, 次のような結論が導かれる.

   $|A - \lambda E| \neq 0$ のとき, A は固有ベクトルを持たない.

   と, いうことは $\cdots$. A が固有ベクトルを持つ条件は, もう分かったようなモノである.

2. $A - \lambda E$ **が非正則行列の場合**

   ⇒ つまり, $|A - \lambda E| = 0$ の場合, $\boldsymbol{A}$ **は, 固有ベクトルを持つ!!**

   $|A - \lambda E| = 0$ のとき, A は固有ベクトルを持つ!!

definition : 固有方程式

方程式

$$|A - \lambda E| = 0$$

を, A の**固有方程式 (eigen equation)** という. 固有方程式を満たす λ は, A の**固有値**である.

1.1.4 実際に固有値を求める手順

というわけで, 固有方程式の導出が完了した. 実は, この固有方程式を使えば, 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めることができる.

固有値, 固有ベクトルの求めかた

行列 A の固有値, 固有ベクトルを求める.

1. A について, 固有方程式 $|A-\lambda E|=0$ を解く.
2. 固有方程式の解 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ は, 行列 A の固有値である.
3. 固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ を, それぞれ $(A-\lambda E)\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ に代入.
4. 各固有値に対応する $\boldsymbol{v}$ を求める. これが, 固有値に対応する**固有ベクトル**である. □

例題 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよう. **千葉大学**

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

1. **固有方程式**を解いて, **固有値**を求める.

$$\left|\underbrace{\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}}_{A}-\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}}_{\lambda E}\right|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\text{左辺}=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ 2-\lambda & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)(4-\lambda)\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=(2-\lambda)(4-\lambda)=0 \qquad \therefore \lambda=2,4.$$

2. それぞれの固有値に対応する**固有ベクトル**を求める.

(a) $\lambda=2$ について.

$$\begin{pmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}3-2 & -1\\ -1 & 3-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

▷ 左辺の係数行列に掃き出し法を使う.

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \therefore x-y=0 \text{ より}, \quad x=y.$$

$y=t$ ($^\forall t\in\mathbb{R}$) とおくと, $x=t$. よって, $\lambda=2$ に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}t\\ t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

▷ ただし, $\mathbf{0}$ は固有ベクトルではないと定義してあったので, $^\forall t\in\mathbb{R}$, $\underline{t\neq 0}$である.

(b) $\lambda = 4$ について.

問題 1 $\lambda = 4$ に対応する固有ベクトルを求めよう.

問題 2

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$ の固有値と固有ベクトルを求めよう. **和歌山大学**

問題 3

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$ の固有値と固有ベクトルを求めよう. **東京工業大学**

問題 4

$$D = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$ の固有値と固有ベクトルを求めよう. **東京工業大学**

問題 5

n を自然数とし, A を n 次の正方行列とする. 次の問に答えよ. **札幌教育大学**

1. A が正則行列でないならば, $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となる $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ が存在することを証明せよ.
2. $c \in \mathbb{R}$ とする. c が A の固有値である必要十分条件は $\det(cE - A) = 0$ であることを証明せよ.

   ただし, c が A の固有値であるとは, $A\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{v}$ なる $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ が存在することである.

   また, $\det A$ によって A の行列式を表し, E は単位行列である.

1.1.5 固有値, 固有ベクトルに関係する便利な定理

theorem : 2 次の行列の固有方程式

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について, 固有方程式は,

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}A\ \lambda + \det A = 0 \quad \text{である.}$$

($\mathrm{tr}A$ は, 行列 A の対角成分の和.トレース.)

問題 6 上の定理を証明せよ.

theorem : $\mathrm{tr}A$ と, $\det A$ と, 固有値の関係

n 次の正方行列 A について, A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とすると,

$$\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$$

$$\mathrm{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$

Proof. λ_i $(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ は, A の固有方程式の解である.
よって, $\det(A - \lambda E) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$ となる. (因数分解)
右辺を展開すると, $\det(A - \lambda E) = \lambda^n + O(\lambda^{n-1}) + \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.
変数 λ は任意なので, $\lambda = 0$ を代入すると, $\det A = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda n = \prod_{k=1}^{n}\lambda_k$.

$\det(A - \lambda E)$ を行列式の定義に従って展開すると,
$\det(A - \lambda E) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda) + O(\lambda^{n-2}) \ \cdots \ (*)$
λ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ は, $\det(A - \lambda E) = 0$ の解なので, 因数分解を行うと,
$\det(A - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda) \ \cdots \ (**)$

$$(*) = O(\lambda^{n-2}) + (-1)^{n-1}\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kk}\right)}_{\mathrm{tr}A}\lambda^{n-1} + (-1)^n\lambda^n.$$

$$(**) = O(\lambda^{n-2}) + (-1)^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)\lambda^{n-1} + (-1)^n\lambda^n.$$

両辺の, λ^{n-1} の係数を比較すると, $\mathrm{tr}A = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k$. □

theorem：逆行列の固有値, 固有ベクトル

正則行列は絶対に固有値として 0 を持たない.
正則行列 A が固有値 λ_k を持つとき, A の逆行列 A^{-1} の固有値は, $1/\lambda$ である.
また, A の固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は, A^{-1} の固有ベクトルである.

Proof. A を正則行列とすると, 正則性より, $\det A \neq 0$ となる.
$\det A = \prod_k \lambda_k$ より, λ_k $(k = 1, 2, \cdots, n) \neq 0$ である.

$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ の両辺に左から A^{-1} をかけると,

$\boldsymbol{x} = \lambda A^{-1}\boldsymbol{x}$.　$\therefore A^{-1}\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}$. □

theorem：Frobenius の定理

行列 A が固有値 λ_k を持つとき, 行列 A についての多項式

$$\sum_{j=0}^{n} a_j A^j = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n$$

は, 固有値

$$\mu_k = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda_k^j = a_0 + a_1\lambda_k + a_2\lambda_k^2 + \cdots + a_n\lambda_k^n \quad \text{を持つ.}$$

また, A の固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は, $\sum_{j=0}^{n} a_j A^j$ の固有ベクトルである.

Proof. **証明略.** □

1.1.6 対称行列の固有値, 固有ベクトル

対称行列と呼ばれる特殊な行列の固有値と固有ベクトルは, 不思議な性質を持っている.

対称行列

まずは, 対称行列を定義しよう.

definition： 対称行列

正方行列 A が,

$$^{t}A = A$$

という性質を満たすとき, A を**対称行列 (symmetry matrix)** という.

つまり, 対称行列とは, **転置行列が元の行列と等しくなる行列**のことである. たとえば,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

という行列を考えると,

$$^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = A$$

が成り立つので, **対称行列である**ことがわかる.
対称行列は, その名の通り, 対角成分を軸として, 左右対称の形をしている.

theorem： 対称行列の固有値, 固有ベクトル

- 対称行列の固有値は, **全て実数**である.
- 対称行列の固有ベクトルは, **互いに全て直交**する.

簡単な例によってこのことを確かめてみよう.

例題 次の**対称行列**の固有値と固有ベクトルを求めよう.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

まず, 固有方程式を立てる. 2 次の正方行列の固有方程式は $\lambda^2 - \mathrm{tr}A\lambda + \det A = 0$ となるので,

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \qquad \therefore \lambda = -1, 3.$$

このように, 固有値 $-1, 3$ が求められた. 確かに, 実数の固有値が得られている.

固有値を求め終えたときには, 必ず $\sum \lambda = \sum_k a_{kk}$ の関係を満たすことを調べよう.
(求めた固有値が正しいかどうかを確かめるため)

次に, 各固有値に対応する固有ベクトルを求めよう.

- $\lambda = -1$ について.

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 2 & 1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列を作り, 掃き出し法を使ってこの連立方程式を解く.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore x_{11} = -x_{12}$ となる.
$x_{12} = t$ $({}^\forall t \in \mathbb{R})$ と置くと, $x_{11} = -t$.

$\therefore$ 固有ベクトルは, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad ({}^\forall t \in \mathbb{R},\ t \neq 0)$ □

- $\lambda = 3$ について.

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

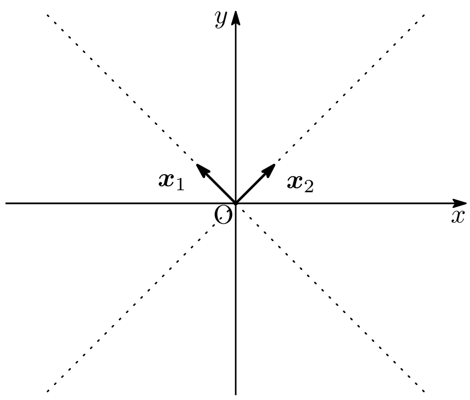
拡大係数行列を作り, 掃き出し法を使ってこの連立方程式を解く.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore x_{21} = x_{22}$ となる.
$x_{22} = s$ $({}^\forall s \in \mathbb{R})$ と置くと, $x_{21} = s$.

$\therefore$ 固有ベクトルは, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad ({}^\forall s \in \mathbb{R},\ s \neq 0)$ □

これにより, 固有ベクトルを求めることができた.
これらの固有ベクトルは互いに直交するのだろうか. グラフを描いて, 直交性を視覚的に確認してみよう



このように, グラフより, 明らかに直交していることが見て取れる.

また, ベクトルの**内積 (inner product)** を使って直交性を確かめることもできる.
内積が 0 のベクトル同士は互いに直交することが知られているので, 内積を計算すると,

$$\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 = (-t) \times s + t \times s = ts - ts = 0.$$

となり, 確かに固有ベクトル同士が直交していることが示された.

証明は省略するが, **この事実は任意の次数の対称行列について成り立つ**. よって, 対称行列の固有値, 固有ベクトルを求める問題で例えば虚数が含まれる固有値が求められたり, 直交しない固有ベクトルが求められたりした場合は, 計算ミスを犯していることが分かるのである.

問題 7 次の対称行列 B の固有値を固有ベクトルを求めよ.
また, 固有値が全て実数であることを確認し, 固有ベクトルが全て互いに直交することを示せ.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

対称行列の固有値, 固有ベクトルを求めるという作業は, **2 次形式の標準化 (normalize of quadratic form)** において非常に重要である. 編入学問題には恐らく 2 次形式の標準化が出題されることはないが, 線形代数に興味が沸いたら, 是非ともチャレンジしてみよう.

1.2 固有空間

1.2.1 固有ベクトルと任意定数

多分気づいていたとは思うが, **固有ベクトルは必ず任意定数を持つ**. 例えば, 2 次の固有ベクトルにしても,

$$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$$

固有ベクトルはこのような形をしており, t は任意定数なので, 自由に動かすことができる. よって, 次のような結論が得られる.

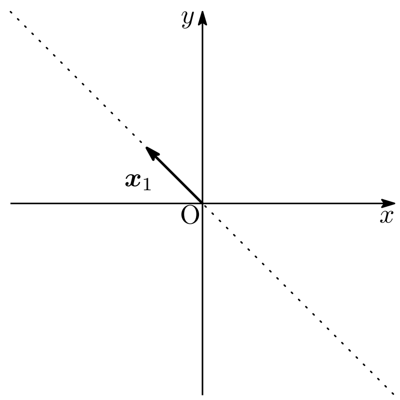
theorem : 固有ベクトルと任意定数

固有ベクトルは, 任意定数を自由に動かせば, 無数の値を取りうる.
よって, **固有ベクトルは無限に存在する**.

もう少しこのことについて深く考えてみよう.

例 p12 例題の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ について.

$$\boldsymbol{x}_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ({}^\forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$$



上図に示すように, $\boldsymbol{x}_1$ は, 任意定数 t を自由に変化させると, 上図の点線に示したような**直線**を描く.
同様に考えれば, p12 例題の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2$ についても, 任意定数 s を自由に変化させれば, やはり直線を描くことがわかる.

1.2.2　基底と, 張る空間

2 次元のベクトル全体が成す空間 $\mathbb{R}^2$ を考えよう.
$\mathbb{R}^2$ から任意の元 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を取り出したときに, $\boldsymbol{x}$ は,

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を使って, 次のように表すことができる.

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$$

このような表し方は, $\mathbb{R}^2$ の元ならば, どんな元についても可能である.
例えば, 何も考えずに, 適当に $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ という元を選んできても,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2$$

と表すことができる. $\begin{pmatrix} 123 \\ 456 \end{pmatrix}$ でも, $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ でも, $\begin{pmatrix} 1.223423 \\ 5.34234123 \end{pmatrix}$ でも, とにかく, $\mathbb{R}^2$ の**全ての元**を, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を使って表すことができるわけである.

definition： 基底と, 張る空間

ある空間 V の**任意の元** $\boldsymbol{x}$ を, あるベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ の**線形結合 (liner combination)** によって,

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n \quad (c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \cdots, n)$$

と表せるとき, ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を, 空間 V の**基底 (bases)** という.

また, このときの V を, 基底の組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が**張る空間**という.

例えば上の例でいうと, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は, $\mathbb{R}^2$ の**基底**であり, 基底の組 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ が張る空間は, $\mathbb{R}^2$ である.

問題 8　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ はどのような基底によって張られ,
その基底の組によって $^\forall\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ はどのように表示できるか.

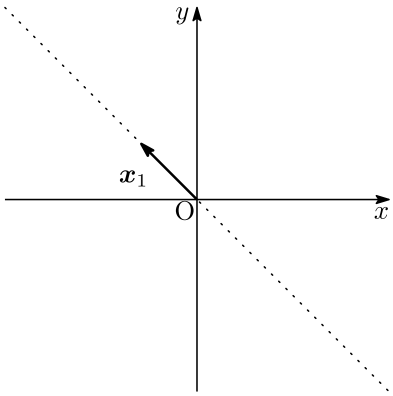
問題 9　実数体 $\mathbb{R}$ はどのような基底によって張られ,
その基底の組によって $^\forall\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ はどのように表示できるか.

問題 10　Gauss 平面 (複素数体) $\mathbb{C} = \{x + iy \mid {}^\forall x, {}^\forall y \in \mathbb{R},\ i : imaginary\ number\}$
はどのような基底によって張られ, その基底の組によって $^\forall\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}$ はどのように表示できるか.

1.2.3　固有空間の定義

基底と, 張る空間という概念を用いると, 固有ベクトルが描く直線を, 次のように解釈することができる.

$$\boldsymbol{x}_1 = t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \qquad ({}^{\forall}t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$$



$\boldsymbol{x}_1$ によって描かれる直線を W とする．この W は, **1 次元空間**である.
${}^{\forall}\boldsymbol{x} \in W$ をとると, $\boldsymbol{x}$ は, 次のように表すことが可能である.

$$\boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \quad \left({}^{\exists}c \in \mathbb{R}\text{：ある実定数 } c \text{ が存在する}\right)$$

つまり, W の任意の (全ての) 元 $\boldsymbol{x}$ を, $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ を使って（**線形結合で**）表すことができる.
このように, ある**固有ベクトル**を基底とし, それによって張られる空間を, **固有空間**という.

definition：固有空間

行列 A の, 固有値 λ に対応する, ある固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする.
$\boldsymbol{x}$ を基底として張られる空間 W を, A の λ に対応する**固有空間 (eigen space)** という.

固有空間の W の元は, 必ず A の**固有ベクトル**となる.

例えば, 上記の例における固有空間は, 以下のように求めることができる.

$$W = \left\{ c\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \middle| {}^{\forall}c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left(W \text{ は, } \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \text{を基底 (方向ベクトル) とする直線である}\right)$$

例題　次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

の固有値, 固有ベクトル, 固有空間を求めよ.

まず, A の固有値は, $\lambda = 1, 2$ (2 重解) となる.

問題 11　上の 2 つの固有値を, 固有方程式から実際に求めよ.

さて, この固有値を見て気づくのは, 固有値に**重解**が現れているということである. 今までは重解が現れないケースだけを扱ってきたが, 今回のような場合はどのように対処すれば良いのだろうか.

まずは, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよう.

- $\lambda = 1$ について.

$$\begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列を作り, 掃き出し法を適用する.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -7 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & 4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & 4 & 0 \\ 12 & -21 & 9 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore -x_2 + x_3 = 0\ ,\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

$x_3 = t$ とおくと, $x_2 = t$.
$x_1 = 2t - t = t$ となる. $\therefore x_1 = x_2 = x_3 = t \ \ ({}^{\forall} t \in \mathbb{R})$. よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^{\forall} t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$$

固有値 $\lambda = 1$ に対応する固有空間を W_1 とすると,

$$W_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| {}^{\forall} t \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{基底} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{によって張られる直線}) \text{ となる. } \square$$

- $\lambda = 2$ について.

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 3 & -7 & 3 \\ 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列を作り, 掃き出し法を適用する.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & 3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0$$

$x_2 = 3t, x_3 = 3s$ とおくと, $3x_1 = 21t - 9s \quad \therefore x_1 = 7t - 3s$.

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{y}$ は,

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 7t - 3s \\ 3t \\ 3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} s \quad ({}^{\forall} t, {}^{\forall} s \in \mathbb{R},\ t \neq 0 \vee s \neq 0).$$

さて, この場合の固有空間は果たしてどのような姿をしているのだろう.
そのことについて, これから詳しく調べてみる.

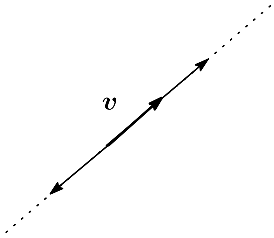


図 (a)

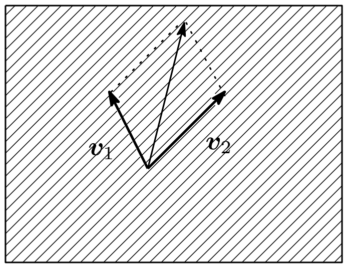


図 (b)

図 (a) は, 1 つのベクトル $\boldsymbol{v}$ に張られる空間が直線 (1 次元空間) であることを示したものである.
図 (b) は, 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ に張られる空間が, **平面 (2 次元空間)** であることを示したものである.

一般に n 個 の基底がどのような空間を張るかについては後ほど詳しく学ぶこととするが, とりあえず, 現段階では, **1 つの基底は直線を張り, 2 つの基底は平面を張る**ということを知っておけば良い. よって, 先程の例題において登場した固有ベクトル

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 7t-3s \\ 3t \\ 3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} s \quad ({}^\forall t, {}^\forall s \in \mathbb{R},\ t \neq 0 \vee s \neq 0).$$

は, t, s を自由に変化させることによって, $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ を基底とする**平面を張る**ということが分かる.

固有ベクトル $\boldsymbol{y}$ による固有空間を W_2 とすると,

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} s \;\middle|\; {}^\forall t, {}^\forall s \in \mathbb{R} \right\}$$ となる. W_2は, $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ を基底とする平面である.

問題 12 次の行列 A の固有値, 固有ベクトル, 固有空間を全て求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

問題 13 次の行列 B の固有値, 固有ベクトル, 固有空間を全て求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1.2.4 基底の条件

まずは, **基底**についてもっと詳しく学ぶことから始めよう.

definition : 基底が満たすべき性質

次の性質を満たすベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ を, 空間 V を張る基底の組と呼ぶ.

1. 互いに**線形独立 (linearly independent)** である.
2. V の任意の元が, 線形結合 $\sum_k c_k \boldsymbol{a}_k$ で表せる.

ベクトルの線形独立, 線形従属

ベクトルの組には, 互いに線形独立な組と, 互いに線形従属な組がある.
これから, ベクトルが線形独立, 線形従属であるとはどういうことなのかを定義してみよう.

definition : ベクトルの線形独立性, 線形従属性

ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ について,

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

を, **線形関係式 (linear structural relationships)** という.

1. 線形関係式を満たす係数の組 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ が $(0, 0, \cdots, 0)$ のみならば,
ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は, 互いに**線形独立 (lineary independent)** であるという.
2. 線形関係式を満たす係数の組 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ に, **1 つでも, 0 でない係数が存在**するのならば,
ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は, 互いに**線形従属 (lineary dependent)** であるという.

実際にベクトルの線形独立性を判定してみよう.

例題　次の 3 つのベクトルの組は, 互いに線形独立であるか, 線形従属であるかを判定せよ. **筑波大学**

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. **線形関係式**を作る. ⇒ 係数 c_1, c_2, c_3 についての, **等質連立 1 次方程式**が得られる.

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. 拡大係数行列を作り, 掃き出し法を適用する.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore c_1 - c_2 + 2c_3 = 0,\ c_2 - 3c_3 = 0,\ 2c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

$\therefore \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$は, 互いに**線形独立**である. □

このように, 線形独立性を判定するには, まず**線形関係式を立てて, 係数が全て 0 となることを示せば良い**.

例題 次のベクトルの組が互いに線形従属であることを示せ.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. 線形関係式を立てる (c_1, c_2, c_3 に関する等質連立 1 次方程式が得られる).

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0} \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(この式変形は, すぐに出来るようになっておこう)

2. 拡大係数行列を作り, 掃き出し法を適用する.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore c_1 + c_2 + 2c_3 = 0,\ c_2 = -c_3 \quad \Rightarrow \quad c_3 = t$ と置くと, $c_2 = -t, c_1 = -t.$

$$\therefore \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^{\forall} t \in \mathbb{R}) \quad \text{より},$$

線形関係式を満たす, 0 でない c_1, c_2, c_3の組が存在するから, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$は互いに**線形従属**. □

問題 14 次のベクトルの組が線形従属であることを示せ. **九州大学**

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

さて, ある空間 V の基底は,

1. 互いに**線形独立 (linearly independent)** である.
2. V の任意の元が, 線形結合 $\sum_k c_k \boldsymbol{a}_k$ で表せる.

という 2 つの条件を満たさなければならない.

例えば, 2 次元実数ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ を考えると, ベクトルの組

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は, $\mathbb{R}^2$ の基底となる. なぜなら, $\mathbb{R}^2$ の任意の元 $\boldsymbol{x} = \binom{x_1}{x_2}$ を取ると,

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2$$

と表すことができ, 更に, $\boldsymbol{e}_1$と $\boldsymbol{e}_2$ の線形関係式を立てると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり, この等質連立 1 次方程式を解くと, $c_1 = c_2 = 0$ となる. $\therefore \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$は線形独立である.
よって, ベクトルの組 $\{e_1, e_2\}$ は, 基底となり得るための条件を全て満たしているので, $\mathbb{R}^2$ の**基底**である.□

あるベクトルの組が空間の基底となるかどうかを判定するには, **基底の条件**

1. 互いに**線形独立 (linearly independent)** である.
2. 空間 V の任意の元が, 線形結合 $\sum_k c_k \boldsymbol{a}_k$ で表せる.

を全て満たすかどうかを確かめれば良い. 基底の条件を全て満たすベクトルの組は空間の基底となるし, 基底の条件を 1 つでも満たさないベクトルの組は, 絶対に基底とはならない.

1.2.5 次元の定義

基底という考え方が定義できると, 空間の**次元 (dimension)** という概念を定義することができる.

definition : 空間の次元

空間 V を張る基底の個数 n を, 空間 V の**次元 (dimension)** といい,

$$\dim V = n$$

と表す. ただし, $V = \{\boldsymbol{0}\}$ とき, $\dim V = 0$ と定義しておく.

一般に, **次元よりも多いの本数の基底をとることが不可能**である.

例えば, $\mathbb{R}^2$ の基底の個数は 2 個なので,$\mathbb{R}^2$ の次元は 2 である. このことを, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ と書く.

theorem：$\mathbb{R}^n$ の次元

一般に,

$$\dim \mathbb{R}^n = n \quad \text{が成り立つ.}$$

例えば, 3 次元実数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の次元は, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ となる.
$\mathbb{R}^3$ には **3 個以上の基底をとることが出来ない**.
(例えば, 自然基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ に適当なベクトルを加え, それらの**線形独立性を判定**してみると分かる)

1.2.6　固有空間の次元と, 固有値の重複度の関係

さて, ここからは今までの知識を踏まえて, 再び固有空間について考えよう.

(復習) definition：固有空間

行列 A の, 固有値 λ に対応する, ある固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする.
$\boldsymbol{x}$ を基底として張られる空間 W を, A の λ に対応する**固有空間 (eigen space)** という.

固有空間の W の元は, 必ず A の**固有ベクトル**となる.

このように, **固有ベクトルによって張られる空間**を, 固有空間と定義した. そして, 固有空間は直線となったり, 平面となったり, どうやら色々な形をした固有空間がありそうだということも学んだ.
（**忘れていたら, p18 戻って復習をしておこう!!**）

さて, では, この**固有空間の次元**が一体どのような性質を持っているのかを考える.

ここで重要な手がかりとなるのは, p18 の例で現れている固有空間 W と, p19,20 の例題で現れる固有空間 W_1, W_2 である. これらの結果をよく観察すると, 何かに気づかないだろうか.

Let's thinking　p18 の固有空間 W と, p19,20 の固有空間 W_1, W_2 を見て, 気づくことは無いだろうか?

実は, 固有値が 2 重解になった途端に, 固有空間が 2 次元になっていることに気づくことができただろうか.
これこそが, 固有空間の次元が持つ, 重要な性質なのである. この性質を美しい形に書き表すために, まずは, 固有値の**重複度 (multiplicity)** を定義する.

definition：固有値の重複度 (代数的重複度)

ある行列 A の固有値 λ_k が $\boldsymbol{n}$ **重解**ならば, 固有値 λ の重複度 (代数的重複度) μ_k は,

$$\mu_k = n \quad \text{と定義する.}$$

このように, **固有値が何重解なのか**を表すのが, 固有値の重複度という考え方である.
さて, 今までなにやら基底やら, 固有値の重複度やら, 固有空間の次元やらを何だか色々とごちゃごちゃ議論してきた.　一体こんなことを議論して何になるのやら, と思ってしまいがちだが, 実はそれらの間には, 以下に示すような**とても美しい性質**が成り立つ. この性質に辿り着くために, 今まで何だかよくわからない議論を重ねてきたのである.

theorem： 固有値の重複度と, 固有空間の次元の関係

ある行列 A の固有値 λ_k の重複度を μ_k とする. また, λ_k に対応する固有空間を W_k とする. このとき,

$$\dim W_k \leq \mu_k \quad \text{が成り立つ.}$$

(固有空間の次元を, **幾何的重複度**という)

何と, 固有値 λ_k に対応する固有空間の次元は, 必ず**固有値の重複度と等しいか, それより小さくなる**.

例えば, p19 の例における固有値 $\lambda = 2$ は, **2 重解**なので, 固有値の重複度は 2 であることが分かる. そして, 固有値 $\lambda = 2$ に対応する固有空間の次元は, 確かに **2 次元**である. このように, この興味深い性質は確かに成立しているのである.

注意

固有値の重複度が n であっても, 固有空間の次元が n より小さいこともある.
(例えば, 2 重解の固有値に対応する固有空間が 1 次元空間になることだってある.)

一般に, n 次の行列 A は, 重複度を考慮すると, **必ず n 個の固有値を持つ**.
例えば, p19 の例題の行列は 3 次の正方行列であり, 固有値として, $\lambda = 1, 2$ (2 重解) を持つ.
$\lambda = 2$ の重複度が 2 であるということを, **固有値 $\lambda = 2$ を 2 つ持っている**という風に解釈すると, 確かに固有値を 3 つ持っているということが分かる.

theorem： 固有値の重複度の総和と, 固有空間の次元の総和の関係

n 次の A が固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ を持ち, それぞれの重複度が $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$ であるとする. また, それぞれの固有値に対応する固有空間を $W_1, W_2, \cdots, W_k$ とする.

$$\sum_{i=1}^{k} \dim W_k \leq \sum_{i=1}^{k} \mu_i = n \quad \text{が成り立つ.}$$

この定理は, 後に**行列の対角化可能性**において非常に重要な役割を果たすので, 余裕があれば, 今のうちに理解しちゃっても良いだろう. 余裕が無いなら, 後で理解すれば OK.

問題 15　次の行列 A の固有値と固有ベクトル, 固有空間を全て求め, 全ての固有値について, 代数的重複度と幾何的重複度の間にどのような関係があるかを調べよ.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -14 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

問題 16　次の行列 B の固有値と固有ベクトル, 固有空間を全て求め, 全ての固有値について, 代数的重複度と幾何的重複度の間にどのような関係があるかを調べよ.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

第2章　行列の対角化

固有値, 固有ベクトル, 固有空間の知識を一通り手に入れたところで, 次は**行列の対角化**について詳しく学ぶことにしよう. 行列の対角化とは, ある正方行列 A を, ある**正則行列 P** を上手く作って, それを使って, ウマイ形の**対角行列**に変換する技法である.

2.1　対角化をすると, こんな嬉しいことがある

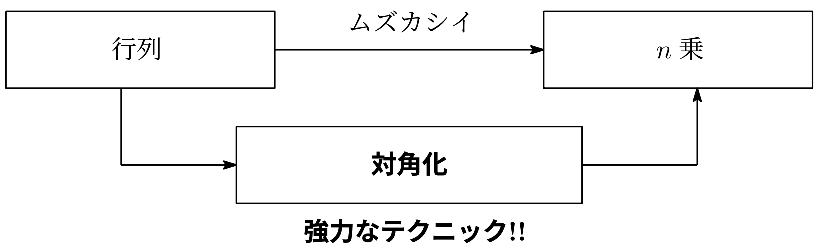
さて, 早速, 対角化を行う方法を $\cdots$ と言いたいところだけれども, いきなり対角化について学んでも, **何のために対角化をするのかというイメージは多分沸いてこない**であろう. そのため, どーもイマイチ身が入らず, 対角化について学ぶ意欲も何となく失せてしまうというオチに陥りがちである.

そこで, まずは, **対角化ができると, 一体なにが嬉しいのか**. そして, **対角化がどんな不可能を可能にするのか**. それらについてまずはイメージをしっかりと掴んでから, 対角化の具体的な勉強に入るとしよう. ハンターが宝の山を必死で探すのは, そのお宝に素晴らしい価値があるからなのだから.

2.1.1　行列の n 乗計算

行列の n 乗を計算するのは, 一般に**非常に難しい**ことである. 例えば, Cayley-Hamilton の定理を使ったり, 数学的帰納法を使ったり, とにかく, なかなか骨が折れる作業である. というか, **そもそも行列の n 乗を求めるのが不可能なことだって多い**.

が, 行列の n 乗は, **対角化を上手く利用することによって, 綺麗に求められることが多い**.



2.1.2　指数行列 e^A の計算

指数関数が有名であるように, **指数行列** (exponent matrix) というものが定義されている. この行列は, **制御理論**において, 極めて重要な役割を果たすのだが, この行列を正確に求めるには, **対角化を利用するしか方法**がない. 対角化は, **現代社会の重要な基盤である, 制御理論を司っている**.

2.1.3 線形微分方程式の解法

微分方程式の解を見つけることは, 非常に難しい. が, 世の中の物理現象を解明するには, 微分方程式を解く必要がある. さらに, 物理現象だけではなく, 制御理論, 金融工学, 確率論などでも, 微分方程式を解くことは**絶対に必要**である.

そこで, 対角化は, 微分方程式を解くための非常に強力な武器となる. 対角化を利用することによって, **解けなかった微分方程式が解けるようになる**ことがあるのである.

このように, 対角化は**線形代数学においてのみならず, 様々な実用的な分野で重要な役割を果たしている**ことが何となく, 理解できただろうか. だから対角化を勉強するのである. だから, 対角化は大事なのである.

2.2 行列の対角化とは

では, 行列の対角化について早速学ぼう. 行列の対角化とは, **ある正則行列 P を使って, 行列 A を対角行列に変換すること**をいう.

theorem : 行列の対角化

正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ が n 個の相違なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ を持つとき,

それぞれに対応する互いに線形独立な固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ とする.

このとき, **固有ベクトルを列ベクトルとして持つ行列** $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$ により,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と, **固有値を対角成分として持つ, 対角行列が得られる**.
この一連の流れを, **行列の対角化 (diagonalization)** という.

n 次正方行列 A が, **異なる n 個の固有値 (つまり, 全ての固有値の代数的重複度が 1)** を持つとき, それぞれに対応する固有ベクトルを列ベクトルとして並べた行列 $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$ を用いて, 対角行列を

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right)$$

というように得ることが出来る. そして, 対角行列をこの流れに従って求めるのが, まさに行列の対角化なのである.

行列の対角化においては,

- 固有値を求める力
- 固有ベクトルを求める力
- 対角化を実際に行う力

が全て問われることになるので, **編入学試験問題では頻出中の頻出**である.

2.2.1 記号の定義

これから学ぶ**対角化**においては, その名のとおり**対角行列**が頻繁に現れる. が, 対角行列をいちいち丁寧に

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と書くのは, とても面倒＆スペースの無駄である（書くだけならまだ良いけど, こっちは $\TeX$ なんだ！）. と, いうわけで, 上に示した対角行列を, 省略して以下のように表記しても良いことに約束しておく.

$$\mathrm{diag}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

以下, 断りなくこの表記法を用いることが度々あるが, ああ, 対角行列ね, と思ってくれれば OK である.

2.2.2　対角化のメカニズム

では, 行列の対角化がなぜここまで上手く行くのか, ということについて数学的に考えてみよう.

まず, n 次正方行列 A が, 相異なる n 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ を持ち, それぞれに対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ とする.

theorem : 固有ベクトルの線形独立性

相異なる固有値に対応する固有ベクトルの組は, **互いに線形独立**である.

Proof. 行列 A の相違なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_k$ に対して, それぞれ対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ とすると, $A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2, \cdots, A\boldsymbol{x}_k = \lambda_k\boldsymbol{x}_k$ が成り立つ (**固有値, 固有ベクトルの定義**).

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ についての線形関係式

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$$

を立てると,$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ が線形独立であるためには, 線形関係式を満たす係数が,
$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ のみである必要がある.

まず, 線形関係式の両辺に左から A をかけ, 更に, 固有値と固有ベクトルの関係を用いると,

$$c_1A\boldsymbol{x}_1 + c_2A\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_kA\boldsymbol{x}_k = A\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad c_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0} \quad \cdots \quad (*)$$

また, 線形関係式の両辺に λ_1 をかけた式を考える.

$$c_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\lambda_1\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_k\lambda_1\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0} \quad \cdots \quad (**)$$

$(*) - (**)$ を行うと,

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_k(\lambda_k - \lambda_1)\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$$

全ての固有値は互いに異なるので, $c_2 = c_3 = \cdots = c_k = 0$.
さらに, これを線形関係式 $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ に代入すると, $c_1 = 0$ が得られる.
$\therefore \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ は, 互いに線形独立である. □

すなわち, 上の定理によると, 固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ について, 以下の**線形関係式**,

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$$

を満たす係数は, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ のみである.

次に, 線形関係式を変形すると,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

この**等質連立 1 次方程式**を得ることができる.
この連立方程式の解は $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, つまり, **自明な解のみを持つ**ので, 係数行列 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$ は, **正則行列**である. (非正則であると仮定すると, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ 以外の解が現れ, 矛盾が生じる)

さて, いよいよ行列の対角化について考えよう.A の固有値と, 固有ベクトルの間には次の関係が成り立つ.

$$A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1\ ,\ A\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2\ ,\ \cdots\ ,\ A\boldsymbol{x}_n = \lambda_n \boldsymbol{x}_n$$

この全ての関係式をまとめて書くと,

$$A\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\boldsymbol{x}_1 & \lambda_2\boldsymbol{x}_2 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{x}_n\end{pmatrix}$$

右辺を変形すると,

$$A\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

ここで, $P = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n\end{pmatrix}$ と置くと,

$$AP = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

P は正則性が保証済みであったので, 両辺に左から P^{-1} をかけると,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

このように, A を**固有値が並んだ対角行列に変換**することができた.

この手順に従って対角行列を得ることができる行列を, **対角化可能な行列**といい, 対角化に用いる正則行列 P を, **変換行列 (transformation matrix)** という.

では, 早速簡単な行列の対角化を実際に行ってみよう.

例題 次の行列 A を対角化せよ.

$$A = \begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

対角化は, 先程考えた対角化の手順に従って行う.

method : 対角化

正方行列 A（固有値の重複度は全て 1 とする）を対角化する手順を示す.

1. 固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ を全て求める.
2. 固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を全て求める.
3. 固有ベクトルを列ベクトルとして持つ**変換行列** $P = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n\end{pmatrix}$ を作ると,

   対角行列 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ が得られる.

まず, A の固有値を全て求めよう. 固有方程式を解くと,
$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \ \therefore$ 固有値 $\lambda = 2, 3$.
固有値が全て異なるので, この行列は**対角化可能**である.

固有値に対応する固有ベクトルを全て求める.

- $\lambda = 2$ について,

$$\Big(A - \lambda E\Big)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列を作り, 掃き出し法を適用する.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore x_{11} = x_{12} \quad \Rightarrow \quad x_{12} = t \text{ と置くと}, x_{11} = t. \quad \therefore \ \boldsymbol{x}_{11} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$$

- $\lambda = 3$ について,

$$\Big(A - \lambda E\Big)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列を作り, 掃き出し法を適用する.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore x_{21} = 2x_{22} \quad \Rightarrow \quad x_{22} = s \text{ と置くと}, x_{21} = 2s. \quad \therefore \ \boldsymbol{x}_2 = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^\forall s \in \mathbb{R}, s \neq 0)$$

ここまでは, 今まで勉強してきた通りの手順である.

さて, いよいよメインの**対角化**を始めよう. まずは, **変換行列** P を作る.
変換行列は, **列ベクトルとして固有ベクトルを持つ行列**である.

$$P = \Big(\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2\Big) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

あとは, この変換行列によって $P^{-1}AP$ を計算すると, 対角行列 $\mathrm{diag}\,(2,3)$ が得られるはずである.

問題 17　$P^{-1}AP$ が実際に対角行列 $\mathrm{diag}\,(2,3)$ となることを示せ.

▷ $P^{-1}AP = \mathrm{diag}\,(2,3)$　となったので, **対角化完了**である. □

対角化の手順は, 以上である. この手順は,3 次の行列でも,4 次の行列でも, もっと一般的な n 次の行列でも, 全く同じである. **固有値の重複度が全て 1 である行列は, 同様の手順によって必ず対角化可能**である.

では次は, 3 次の行列の対角化にも挑戦してみよう.

例題 次の行列 B を対角化せよ.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

固有値を求めるために, 固有方程式を解く.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{左辺} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \quad \therefore \quad \lambda = -1, 2, 3$$

(固有値の重複度が全て 1 なので, この行列は**対角化可能**である)

- $\lambda = -1$ について,

$$\Big(B - \lambda E\Big)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列を作り, 掃き出し法を適用する.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore x_{12} = 2x_{13},\ x_{13} = 0,$ よって, $x_{12} = 0.$

注意!!

x_{11} に関しては, 条件式が全く無い. つまり, x_{11} は**どんな値を取っても OK**. 注意しよう.

$x_{11} = t$ と置くと, $\boldsymbol{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$

- $\lambda = 2$ について (過程略),

$$\text{固有ベクトル} \quad \boldsymbol{x}_2 = s\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ({}^\forall s \in \mathbb{R}, s \neq 0).$$

- $\lambda = 3$ について (過程略),

$$\text{固有ベクトル} \quad \boldsymbol{x}_3 = u\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \quad ({}^\forall u \in \mathbb{R}, u \neq 0).$$

対角化を行うために, 変換行列 P を作る.

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

あとは, 変換行列 P によって対角化を行うと,

$$P^{-1}BP = \mathrm{diag}\,(-1, 2, 3) \quad \square$$

問題 18　$P^{-1}BP$ が実際に対角行列 $\mathrm{diag}\,(-1, 2, 3)$ となることを示せ.

問題 19　次の各行列に対して, 固有値と固有ベクトルを求め, 対角化せよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

（ 左から, **千葉大学**, **筑波大学**, **東京工業大学** ）

2.3 行列の対角化可能性

1. 行列が相異なる固有値を持つ.
2. よって, 固有ベクトルが全て線形独立となる.
3. よって, 変換行列は正則行列となり, 逆行列が存在する.
4. よって, $P^{-1}AP$ により, 対角行列が得られ, 対角化完了.

これが, 今まで学んできた**対角化の流れ**であった.

まず, 行列が**相異なる固有値を持つ**ことを確かめ, その場合は固有ベクトルが互いに線形独立となる. よって, 固有ベクトルを列ベクトルとして持つ行列 P は正則行列となるので, $P^{-1}AP$ によって対角化を完了することができる.

が, 世の中, そんな都合の良い行列ばかりが存在するワケではない.
既に第 1 章で学んだように, 行列は**重解の固有値**を持つ場合がある. そのような場合, 行列の対角化を行うことはできるだろうか. そして, 出来るのならば, どのように対角化を行えば良いのだろうか. そのことについて, これから詳しく考えてみよう.

2.3.1 線形独立な固有ベクトルさえ手に入れば $\cdots$

変換行列 P は, **固有ベクトルを列ベクトルとして持つ行列**であった. そして, その固有ベクトルが線形独立であるがゆえに, P がうまく**正則行列**となり, 対角化が上手く行えるのであった.

Let's thinking さて, 何か気づくことは無いだろうか?

実は, **固有ベクトルが線形独立となりさえすれば, 変換行列は正則行列となる**.

大事なことなので 2 回言いますよ

固有ベクトルが線形独立となりさえすれば, 変換行列は正則行列となる.

実は, 線形独立な固有ベクトルさえ手に入れば, **固有値が相異なる値である必要はない**のである.

一般に, n 次の行列を対角化する際, 変換行列も n 次の正方行列である必要があるので, 変換行列を作るためには n **本の固有ベクトルが必要**である. よって, **固有値に重解が現れても,** n **本の線形独立な固有ベクトルが手に入るならば, その行列は対角化可能**なのだ.

theorem : 行列の対角化可能性

n 次の正方行列 A は, 線形独立な n 本の固有ベクトルを構成できれば, **対角化可能**である.

ということで, これが, **行列の対角化可能性の条件**である. この条件を満たす正方行列 A は, **対角化可能**だ.

さて, この条件, 何だか**数学的じゃない**気がしないだろうか.
こう, 数学ってのは, 色んな事実が数式をつかってカッコ良くまとめられてて, エレガントで, こう $\cdots$

何だ, こういうことは, やっぱり数式を使って綺麗に記述されてるべきなんじゃないの.ってことで ···
この定義をこれから, **数式を使って綺麗な形にまとめてみよう**.

2.3.2　例を通じて考える

例題 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

を対角化せよ.

まず, A の固有値は, $\lambda = 1, 2$ (2 重解) となる.

さて, 固有値に**重解**が現れてしまった. この場合の対角化について考えてみよう.

- $\lambda = 1$ について.

$$\begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列を作り, 掃き出し法を適用する.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -7 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & 4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & 4 & 0 \\ 12 & -21 & 9 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore -x_2 + x_3 = 0 \ , \ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

$x_3 = t$ とおくと, $x_2 = t$.
$x_1 = 2t - t = t$ となる. $\therefore x_1 = x_2 = x_3 = t \quad ({}^{\forall}t \in \mathbb{R})$. よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^{\forall}t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$$

固有値 $\lambda = 1$ に対応する固有空間を W_1 とすると,

$$W_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| {}^{\forall}t \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{基底} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{によって張られる直線}) \text{ となる.} \ \square$$

さて, この場合, 固有空間が **1 次元**空間 (基底が 1 本) であることが分かる.
一般に, n **次元空間には, 最大で** n **本の線形独立なベクトルを取ることができる**.
よって, $\lambda = 1$ に対応する線形独立な固有ベクトルは, **1 本**手に入れることができる.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 2$ について.

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 3 & -7 & 3 \\ 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列を作り, 掃き出し法を適用する.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & 3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0$$

$x_2 = 3t, x_3 = 3s$ とおくと, $3x_1 = 21t - 9s \quad \therefore x_1 = 7t - 3s.$

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{y}$ は,

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 7t - 3s \\ 3t \\ 3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} s \quad ({}^\forall t, {}^\forall s \in \mathbb{R},\ t \neq 0 \vee s \neq 0).$$

固有ベクトル $\boldsymbol{y}$ による固有空間を W_2 とすると,

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} s \;\middle|\; {}^\forall t, {}^\forall s \in \mathbb{R} \right\}$$ となる. W_2は, $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ を基底とする平面である.

さて, 今度は, 固有空間が **2 次元空間**となった.
2 次元空間には 2 本の線形独立なベクトルを取ることができるので, 線形独立な固有ベクトルを **2 本**手に入れることが可能である.

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

これで, 行列 A の固有値から, 線形独立な固有ベクトルを 3 本手に入れることができた.
あとは, この 3 つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ を列ベクトルとして持つ**変換行列** P を作ると,

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

この変換行列を使って $P^{-1}AP$ を求めれば, 対角行列 $\mathrm{diag}\,(1, 2, 2)$ が得られる.

固有値	固有値の重複度 (代数的重複度)	固有空間の次元 (幾何的重複度)
$\lambda = 1$	1	1
$\lambda = 2$	2	2
	合計 **3**	合計 **3**

よって, 行列 A は**対角化可能**である. □

例題 次の行列 T は対角化可能か.

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

では, 今度はこの行列について考えよう.
まず, 固有方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ を解くと, 固有値は $\lambda = 2$ (2 重解) であることが分かる.

- $\lambda = 2$ について

$$(T - \lambda E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列を作り, 連立方程式を解く.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -x_2 \ \text{ より},\quad x_2 = t \text{ とおくと}, x_1 = -t. \qquad \therefore \boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

対応する固有空間を W_1 とすると,

$$W_1 = \left\{ t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| {}^{\forall} t \in \mathbb{R} \right\}.$$

このように, $\lambda = 2$ に対応する固有空間が **1 次元空間**となった.
1 次元空間には 1 本の線形独立な固有ベクトルしか取ることができないので, 手に入れられる線形独立な固有ベクトルは 1 本である.

変換行列を作るには, 2 本の線形独立な固有ベクトルを手に入れる必要があったが, この行列 T については, 線形独立な固有ベクトルを 1 本しか手に入れることができなかった.

固有値	固有値の重複度 (代数的重複度)	固有空間の次元 (幾何的重複度)
$\lambda = 2$	2	1
	合計 **2**	合計 **1**

よって, 行列 T は, **対角化不可能**である. □

さて, 対角化可能だった 1 つ目の例題と, 対角化不可能だった 2 つ目の例題について, 比較を行ってみよう.

- **対角化可能**な行列 A

固有値	固有値の重複度 (代数的重複度)	固有空間の次元 (幾何的重複度)
$\lambda = 1$	1	1
$\lambda = 2$	2	2
	合計 **3**	合計 **3**

- **対角化不可能**な行列 T

固有値	固有値の重複度 (代数的重複度)	固有空間の次元 (幾何的重複度)
$\lambda = 2$	2	1
	合計 **2**	合計 **1**

Let's thinking 何か気づいたことはない?

theorem : 行列の対角化可能性

n 次正方行列 A が, 固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ を持つとする.
各固有値の代数的重複度を μ_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$ とし, 各固有値に対応する固有空間を W_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$ とする. 行列 A が**対角化可能**であるための条件は,

$$\sum_{i=1}^{k} \underbrace{\dim W_i}_{\text{幾何的重複度}} = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\mu_i}_{\text{代数的重複度}}$$

が成り立つことである. また $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = n$ という定理を用いれば, A が対角化可能である条件は,

$$\sum_{i=1}^{k} \underbrace{\dim W_i}_{\text{幾何的重複度}} = \underbrace{n}_{\text{行列の次数}}$$

が成り立つことである, と書き換えられる.

行列の対角化可能性は, この条件が成り立つかどうかを調べれば判定することができる.

この条件を満たさない行列を対角化することは不可能である. が, **「ああ, 対角化できないのね, じゃあもうお手上げだね」**では終わらないのが数学者だ. というのも, 実は, 対角化不可能な行列については, **対角化の次善の策**が既に考えられている.
その, 対角化によって対角行列を得ることの次善の策とは, **Jordan の標準系**に変形するというものである. 編入学試験に出題されることは多分無いので触れないが, 線形代数に興味が出たら, 是非挑戦してみよう.

問題 20 次の行列を対角化せよ.(対角化できない場合, 理由を簡潔に説明せよ)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

2.4 対称行列の対角化

対称行列については, 対角化が飛躍的に簡単になることが知られている. そのことについてしっかりと理解するために, まずは**直交行列**についての知識を手に入れ, その性質を上手く使った対角化を習得しよう.

(復習) definition : 対称行列

正方行列 A が,

$${}^tA = A$$

という性質を満たすとき, A を**対称行列 (symmetry matrix)** という.

そして, 対称行列の固有値と固有ベクトルには, 次のような性質があった.

（復習）theorem： 対称行列の固有値, 固有ベクトル

- 対称行列の固有値は, **全て実数**である.
- 対称行列の固有ベクトルは, **互いに全て直交**する.

実は, この性質を上手く利用することで, 対称行列の対角化は**驚くほど簡単**になる.

直交行列

definition： 正規直交系

次の性質を満たすベクトルの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を, **正規直交系**という.

- $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$

▷ δ_{mn}：Kronecker の δ

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (\text{if } m = n) \\ 0 & (\text{if } m \neq n) \end{cases}$$

そして, **正規直交系を列ベクトルとして持つ**行列を, **直交行列 (orthogonal matrix)** という.

definition： 直交行列

正規直交系 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を列ベクトルとして持つ行列

$$U = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix}$$

を, **直交行列 (orthogonal matrix)** という.

ハッキリと言うが, **直交行列は線形代数で一番大事な行列**である.
そのくらい, この行列って奥がもの凄く深くて, とにかく, 色んなことを説明したいのだけれど, あいにく, 時間の都合上, 直交行列の性質の中でも特に重要なものしか説明できない (´・ω・`)

theorem： 直交行列の最も重要な性質

直交行列 U は, 以下のような性質を持つ.

$${}^tUU = E \quad \text{つまり,} \quad {}^tU = U^{-1} \qquad (\text{転置} = \text{逆行列})$$

この性質はこれから利用することとなるので, しっかりと理解しておこう.

2.4.1 対称行列の対角化

さて, それでは, 対称行列の対角化について考えよう.

n 次対称行列 A は固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ を持つとし, それぞれに対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ とする. これらの固有ベクトルは, 対称行列の固有ベクトルの性質により, 全て**直交する**. これらの固有ベクトルから, **いつものように**変換行列 P を作ると,

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$$

となる. この変換行列を使えば $P^{-1}AP$ によって対角行列 $\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ が得られる.
つまり, これで何の問題もない. 対称行列は, いつものように対角化を行うことができる.

2.4.2 逆行列を求めるのは大変

ところで, ちょっと考えてみて欲しい.

問題 21 次の行列 P の逆行列を求めるのが ”めんどい ”かどうか答えよ.

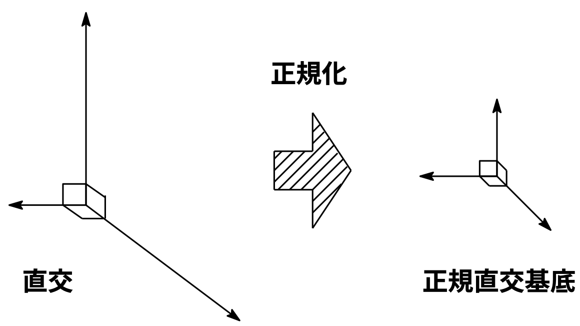
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 5 & 11 \\ 7 & 13 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

そう, **めんどい**のである. 逆行列を求めるという作業は, とても**めんどい**のである.
めんどい！めんどい！めんどい !! めんどい !!! 超めんどい !!!!!

が, 一般に対角化を行う際には $P^{-1}AP$ を計算しなければならない. よって, P^{-1} は, 否が応でも求める必要がある. これは仕方の無い呪縛である. 対角化という強力な武器を手名付けるには, このくらいの対価はやはり払わなければならない.

が !!!

実は, **対称行列の対角化に限っては, 逆行列を求めるという作業から逃れることが可能**なのである.



対称行列の固有ベクトルは, **直交しているが, 長さが揃っていない**ベクトルの組である.
と, いうことは, 長さを揃えさえすれば (**正規化**), 固有ベクトルの組は**正規直交系に変換される**.

(正規化は自分自身の長さで割る $\Rightarrow$ 定数をかけるだけなので, 長さを揃えた後のベクトルも,
やはり固有ベクトルであることには変わりない.)

ということで, 対称行列の固有ベクトルを正規化したものを, $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ とする.

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\} \overset{\text{正規化}}{\Rightarrow} \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$$

これらを列ベクトルとして並べて P を作る.

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix}$$

この変換行列を使えば, $P^{-1}AP$ によって, 対角行列 $\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ が得られる.

が, 今回は**何かがひと味ちがう**. P は列ベクトルとして**正規直交系を持つ**. つまり, **直交行列**なのである.
ということは, P は直交行列であるので, 以下の性質が成り立つ.

$$P^{-1} = {}^tP$$

よって, 実は, P の逆行列をわざわざ真っ向から求める必要は**ない**.
転置行列を求めさえすれば, P の逆行列を求めたことになるわけだ. これは大変**素晴らしいアイデア**である.

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

method：対称行列の対角化

A を対称行列とし, A は固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ を持ち, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ とする.

1. A の固有値, 固有ベクトルを求める.
   A は対称行列なので, 求めた固有ベクトルは全て**直交**している.

2. 固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を**正規化**したベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ とする.
   $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は, 明らかに**正規直交系**である.

3. $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ を列ベクトルとして持つ変換行列を作る.

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix}$$

4. P は直交行列なので, $P^{-1}AP = {}^tPAP = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ となり, 対角化完了.
   (P^{-1} を大変な思いで求める必要はなく, ${}^tP$ を求めれば良い. 簡単である.)

問題 22 次の対称行列 S を, 直交行列を用いて対角化せよ.

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

問題 23 次の対称行列 A を, 直交行列を用いて対角化せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.4.3 重解の固有値を持つ対称行列の対角化

前回の復習：対称行列の対角化

対称行列 A の対角化の方法を以下に示す.

1. A の固有値と固有ベクトルを求める.
2. A は対称行列より, 固有ベクトルは全て**直交**する.
3. 全ての固有ベクトルをそれぞれ正規化したベクトルの組を $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ とすると, これらは**正規直交系**を成す A の固有ベクトルである.
4. よって,$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を列ベクトルとして持つ変換行列 P は, **直交行列**となる.
5. 直交行列の性質 $P^{-1} = {}^tP$ より, $P^{-1}AP = {}^tPAP$ により対角化を行える.

このように, 対称行列の対角化は飛躍的に簡単になるということを前回は学んだ.
では, 次のような例の場合はどうだろう.

例題 次の行列 A を直交行列により対角化せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

まずは, この行列の固有値を求める.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 4-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 4-\lambda & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$$\therefore\ A \text{ の固有値は}, \lambda = 1(2\text{ 重解}), 4.$$

さて, 固有値に 2 重解が現れた.
とりあえず, いつものように固有値と固有ベクトルを求めよう.

- $\lambda = 4$ について,

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列を作り, 掃き出し法で等質連立 1 次方程式を解く.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_{11} + x_{12} - 2x_{13} = 0\ ,\ x_{12} = x_{13}. \quad x_{13} = t \text{ とおくと}, x_{12} = t, x_{11} = t.$$

$$\therefore \boldsymbol{x}_{11} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$$

- $\lambda = 1$ について,

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列を作り, 掃き出し法で等質連立 1 次方程式を解く.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 0.$$

$$x_{23} = s, s_{22} = u \text{ とおくと}, x_{21} = -s - u.$$

$$\therefore \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -s-u \\ u \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ({}^\forall s, {}^\forall u \in \mathbb{R}, s \neq 0 \text{ または } u \neq 0)$$

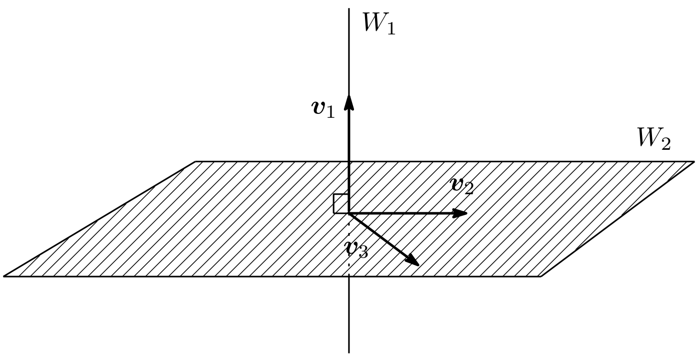
$\lambda = 4$ に対して, 線形独立な固有ベクトルを 1 本, $\lambda = 1$ に対して, 線形独立な固有ベクトルを 2 本とることが出来た. よって, この行列は対角化可能である.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これらが**直交しているのならば**, それぞれを正規化して変換行列 P を作れば, A を対角化する直交行列を得ることが出来る. が, そう上手くは行かないわけで $\cdots$

$$\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_3 = (-1) \times (-1) + 0 \times 1 + 1 \times 0 = 1 \neq 0.$$

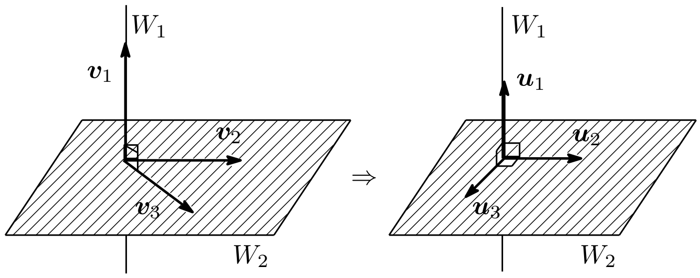
というように, 対称行列の固有ベクトルであるはずなのに, $\lambda = 1$ (2 重解) に対応する固有ベクトルどうしが**直交していない**のである. こりゃ一体どうしたもんだろうか. この原因は, 実は**固有空間に目を向けると見えてくる**のである. $\lambda = 4$ に対応する固有空間を W_1, $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルを W_2 としよう.



W_1 は, 線形独立な 1 本の固有ベクトルにより張られる空間なので, **直線 (1 次元空間)** となる.
また,W_2 は, 線形独立な 2 本の固有ベクトルにより張られる空間なので, **平面 (2 次元空間)** となる.

上図からも分かるように, 実は, 対称行列の固有空間は確かに直交している (W_1 は W_2 の, さらに, W_2 は W_1 の**直交補空間**である) が, W_2 上には **2 本の線形独立な固有ベクトルを任意に取れる**ので, **たまたま得られた 2 本の固有ベクトルが直交しているとは限らない**.

つまり, 私たちは, W_2 上の 2 本のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を, **正規直交系に変換**しなければならないのである.



$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を正規直交系 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ に変換すれば, 直交行列の変換行列 $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{pmatrix}$ が得られる.

2.4.4 Gram-Schmidt の正規直交化法

例えば, 最も簡単な場合として, 2 次元空間 W について考えよう. W の任意の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ が得られているとき, **Gram-Schmidt の正規直交化法**により, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ から, W の**正規直交系を必ず構成できる**.

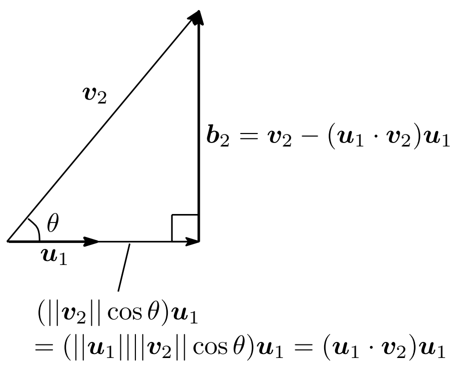
1. 基底 $\boldsymbol{v}_1$ を**正規化**する (正規化後のベクトルを $\boldsymbol{u}_1$ とする).

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{||\boldsymbol{v}_1||}.$$

2. ベクトル $\boldsymbol{b}_2$ を, 次のように構成する.

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{u}_1.$$

このように構成した $\boldsymbol{b}_2$ は, $\boldsymbol{u}_1$ と**直交**する. なぜなら,



という関係が成立するからである.
あとは, $\boldsymbol{b}_2$ を正規化し, $\boldsymbol{u}_2$ とすると,

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{||\boldsymbol{b}_2||}.$$

3. $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ は, W の**正規直交系**である.

この方法は重要なので, 是非ともゆっくり, じっくり理解しておいてほしい.
当然ながらこのアルゴリズムは, 2 次元空間のみならず, 3 次元, 4 次元, $\cdots$, さらには一般の n 次元空間においても適用することができる. その方法を以下に示そう.

algorithm：Gram-Schmidt の正規直交化法

n 次元空間 W のある基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ から, 正規直交系 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を構成したい.

1. $\boldsymbol{v}_1$ を正規化し, $\boldsymbol{u}_1$ とする.
$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{||\boldsymbol{v}_1||}.$$

2. $\boldsymbol{b}_2$ を, 次のように構成する.
$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{u}_1.$$
$\boldsymbol{b}_2$ は,$\boldsymbol{u}_1$ と直交するので, $\boldsymbol{b}_2$ を正規化し, $\boldsymbol{u}_2$ とする.
$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{||\boldsymbol{b}_2||}.$$

3. $\boldsymbol{b}_3$ を, 次のように構成する.
$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \{(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}_3)\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{v}_3)\boldsymbol{u}_2\}.$$
$\boldsymbol{b}_3$ は, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ と直交する.
よって, $\boldsymbol{b}_3$ を正規化し, $\boldsymbol{u}_3$ とする.
$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{\boldsymbol{b}_3}{||\boldsymbol{b}_3||}.$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

4. $\boldsymbol{b}_n$ を, 次のように構成する.
$$\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{v}_n - \sum_{k=1}^{n-1}(\boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{u}_k.$$
$\boldsymbol{b}_n$ は, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ と直交する.
よって, $\boldsymbol{b}_n$ を正規化し, $\boldsymbol{u}_n$ とする.
$$\boldsymbol{u}_n = \frac{\boldsymbol{b}_n}{||\boldsymbol{b}_n||}$$

5. $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は, W の**正規直交系**である.

さて, Gram-Schmidt の正規直交化法を試してみることも兼ねて, 先程の例題の続きを考えてみよう.

私達は, 1 次元固有空間 W_1 上に固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, 2 次元固有空間 W_2 上に線形独立な固有ベクトル $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を得ていた.

$$\underbrace{\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{eigen vector on } W_1}, \underbrace{\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{eigen vector on } W_2}$$

そして, 直交行列の変換行列 P を得るためには, 固有空間 W_2 上に, W_2 の**正規直交系を構成**する必要があった. そのことを, 今から Gram-Schmidt の正規直交化法により実現してみよう.

W_2 上の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を, 正規直交系に変換する.
まずは, $\boldsymbol{v}_2$ を正規化し, $\boldsymbol{u}_2$ とすると,

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{||\boldsymbol{v}_2||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

次に, ベクトル $\boldsymbol{b}_3$ を以下のように構成する.

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{v}_3)\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix}$$

あとは, $\boldsymbol{b}_3$ を正規化し, $\boldsymbol{u}_3$ とすると,

$$\boldsymbol{u}_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}-1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\end{pmatrix}.$$

この $\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は, W_2 の**正規直交系**を成す. よって, A を対角化する直交行列は,

$$P = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

問題 24 実際に, この直交行列 P により, A が ${}^tPAP = \mathrm{diag}\,(4,1,1)$ と対角化できることを確かめよ.

問題 25 次の行列 B を対角化する直交行列を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\2 & -3 & 2\\-1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

問題 26 次の行列 C を対角化する直交行列を求めよ.

$$C = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

2.5　対角化を利用した行列の n 乗計算

ある行列を n 回かけることは, 行列の n 乗と定義されている.

$$A^n = \underbrace{AA\cdots AA}_{n\ 回}$$

行列の n 乗を求めることは, 一般に非常に難しい. 自然数や実数の n 乗とは違い, 行列の n 乗を求めるためには, 様々な工夫が必要となる. 例えば,

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

という, 大変簡単に見える行列でも, F^n を求めるためには相当の労力と時間が必要である.

そこで, **対角化**は, 行列の n 乗を求めるためのとても強力な武器となる.
対角化を利用すれば, 実は, **対角化可能な行列の n 乗は, 全て求めることができる**のである.

2.5.1　n 乗を求めるプロセス

ある行列 A の n 乗を求める場合を考えよう.

まず, A が**対角化可能な行列であると仮定**すると, A はある変換行列 P によって次のように対角化される.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

この式の両辺を n 乗すると,

$$P^{-1}\underbrace{A\underbrace{PP^{-1}}_{E}A\underbrace{PP^{-1}}_{E}\cdots\underbrace{PP^{-1}}_{E}A\underbrace{PP^{-1}}_{E}A}_{A^n}P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}^n$$

対角行列の n 乗は, 対角成分の n 乗であるという定理 $\left(\boxed{\textbf{問題 27}}\ 証明せよ\right)$ を用いると,

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_m^n \end{pmatrix}$$

あとは, 両辺に左から P をかけ, 右から P^{-1} をかけると,

$$A^n = P\ \mathrm{diag}\left(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \cdots, \lambda_m^n\right)\ P^{-1}$$

この式の右辺を計算すれば, A^n は**計算完了**である.

素晴らしきアイデアではあるが, 面倒だと思うかもしれない.
しかし, 行列の n 乗を求めることは, 一般に, **非常に大変な作業**なのである. その方法に, こうして対角化の利用が新たなアプローチを与えているというのは, 実は結構凄いことなのだ.

例題 次の行列 A について, A^n を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

それでは早速, 対角化を用いて A^n を求めてみよう.
まず, 対角化を行うために, 固有値と固有ベクトルを求めてみる.

固有方程式 $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0. \qquad \therefore$ 固有値 $\lambda = -1, 4.$

- $\lambda = -1$ について

$$\Big(A - \lambda E\Big)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore 6x_{11} = x_{12}.\ \ x_{11} = t \text{ とおくと}, x_{12} = 6t.$$

$$\boldsymbol{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad ({}^\forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$$

- $\lambda = 4$ について

$$\Big(A - \lambda E\Big)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x_{21} = x_{22}.\ \ x_{22} = s \text{ とおくと}, x_{21} = s.$$

$$\boldsymbol{x}_2 = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ({}^\forall s \in \mathbb{R}, s \neq 0)$$

固有ベクトルを列ベクトルとして持つ変換行列 P を作ると,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

変換行列を使って A を対角化すると,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

両辺を n 乗すると,

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

両辺の左から P, 右から P^{-1} をかけると,

$$A^n = P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

あとは, 左辺を地道に計算すれば,

$$A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 \cdot 4^n - (-1)^n & -4^n + (-1)^n \\ 6 \cdot 4^n - 6 \cdot (-1)^n & -4^n + 6 \cdot (-1)^n \end{pmatrix} \quad \text{が得られる.} \ \square$$

行列の n 乗を計算する最も簡単な方法として,n 乗の形を**予測**し, 数学的帰納法で正しいことを証明するという方法がある. が, この問題の答えを見ると分かるように, **この形を予測するのはハッキリ言って無理**である. が, 行列の対角化を利用すれば, 数学的帰納法ではどうやら歯が立たなそうなこんな行列の n 乗も, こんなに上手く求められる.

ちなみに, 行列の n 乗を求めるときに数学的帰納法を使うのは, 最も**ナンセンス**なやりかたである. 行列を n 乗を求めるときには,

- **Cayley-Hamilton の定理**を応用する方法 (2 次の行列に有効)
- **対角化**を応用する方法（3 次以上の行列に有効）
- **Jordan の標準形**を応用する方法（対角化不可能な行列に有効）
- **スペクトル分解**を応用する方法（全ての場合に有効, 2 次の場合は特に有効）

が, 標準＆一般的に使われる. 数学的帰納法については,「まあ, 一応こういう風にも証明できるっちゃできるんだね」という程度の認識で留めておかなければならない. 実践で数学的帰納法を使うことは, とりあえず, **まず無い**と言って良いだろう. 自ら進んで使うことも, できるだけ**避けた方が良い**.
なぜなら, 数学的帰納法は, 最初の「答えの推測」が間違えていたらオシマイなのだから.

問題 28 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ について, A^n を求めよ. **茨城大学**

問題 29 次の行列 A の固有値, 固有ベクトルを求め, それを用いて A^n を求めよ. ただし, A^n は行列 A を n 回かけ合わせることを意味する. **千葉大学**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

というわけで, **第 2 章 行列の対角化** はとりあえずここでオシマイである. よって, 固有値, 固有ベクトルを求めたり, 利用したりすることの練習も, このへんでとりあえず一段落といったところだろうか.

が, 固有値, 固有ベクトル, 行列の対角化が作り出すとても実りある世界は, まだまだこんなものではない. 今までは, あくまで固有値, 固有ベクトル, 行列の対角化が織りなす世界を, 針穴からのぞいた程度に過ぎないのである. 固有値, 固有ベクトル, 行列の対角化は, 指数行列, 2 次形式の標準化, Hermite 形式の標準化, 更には Jordan の標準形, 線形写像などにも深く繋がっている. 線形代数に興味が出てきたら, これらの内容にも是非是非チャレンジしてみよう.

これ以上なお手を広げて
いっそう実り豊かな果実を摘む作業については、
読者の努力をまちたいと思う。

—— レオンハルト・オイラー

第3章　線形空間

さて, 今までは固有値, 固有ベクトル, 固有空間、行列の対角化など, いわば**具体的な計算がメイン**となる部分について学んできた. それはそれでもちろん重要なことではあるが, 線形代数学全体で見れば, 今まで学んできた内容は単なる**プロローグ**に過ぎない. 線形代数学は, まさに**これから始まるのだ**と言っても良いのである. これから, 高専の授業では習わなかった, 本当の意味での**線形代数学**を学んで行こう.

私達はこれから, 今までの**具体的**な世界から離れ, **抽象的**な世界へと飛び立つことになる. 最初は「抽象化」に戸惑うかもしれないが, ひとたび本質が理解できてしまえば, 今まで学んできた具体的な世界が, 線形代数学の**ほんの小さな 1 部分**であったことに気づき, 数学が作り出す世界の壮大さに感動することだろう.

3.1　またスタートラインへ

Question　今までの常識において, **ベクトル**とはどのように定義されるものであっただろうか?

私達は今までの勉強で, **ベクトル**を大変多く使ってきた. 固有ベクトルを求めてみたり, 基底で空間を張ってみたり $\cdots$. そして, **ベクトル**とは次のように定義される量であった.

復習：ベクトルの定義

ベクトルとは, **大きさと向きを持った量**のことである.

これから我々は, このベクトルの定義も含めて, 線形代数学全体を見直すことにする. すなわち, **線形代数学を一度ぶっ壊し, 新しく作り直す**のである. 今まで学んできた内容はもちろん間違いではないし, 全くもって正しいものである. が, 線形代数学を再構築することにより, **今までよりもっともっと広い世界が, まるで鳥になって空から眺めたかのように見えてくる**のである.

かつて小泉純一郎が「**私が自民党をぶっ壊す！**」と明言したかの如く（自民党は現在, 別の意味でぶっ壊れてしまったが）, **「我々も, 今までの線形代数学をぶっ壊そう！」**（そして, 再構築しよう！）

3.2　線形空間と, ベクトルの再定義

3.2.1　今までのベクトルの性質を調べてみる

さて, それでは早速, 線形代数学の再構築作業を始めようと思う.

n 次元実数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ を考える. $\mathbb{R}^n$ の性質について詳しく調べてみよう.
$\mathbb{R}^n$ の任意の元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ をとると, 以下の性質が見て取れる.

- $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$　　($\mathbb{R}^n$ は**和について閉じている**)
- $\gamma\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$　　($\mathbb{R}^n$ は, **スカラー倍について閉じている**)

すなわち, n **次元実数ベクトルを足しても, 実数（スカラー）倍しても, やっぱり** n **次元実数ベクトルとなる**ということである. この性質は, **ベクトルの最も重要な性質**であり, これからはベクトルが満たすこの性質を利用し, ベクトルの再定義を行うことになる.

先程の 2 つの性質は, 以下のように 1 つにまとめることが可能である.

- $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $^\forall\alpha, ^\forall\beta \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$ は**線形結合について閉じている**)

更に $\mathbb{R}^n$ の性質について詳しく調べると, 次のことが分かる.

1. **和**についての性質
   - $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ が成り立つ. (**和の交換法則の成立**)
   - $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ が成り立つ. (**和の結合法則の成立**)
   - $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$ を満たす $\mathbb{R}^n$の元 $\boldsymbol{0}$ が, 唯一存在する. (**ゼロベクトルの存在と一意性**)
   - $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ を満たす $\mathbb{R}^n$の元 $-\boldsymbol{a}$ が, $\boldsymbol{a}$ に対して唯一定まる (**逆元の存在と一意性**)
2. **スカラー倍**についての性質 ($^\forall\alpha, ^\forall\beta \in \mathbb{R}$)
   - $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = \beta(\alpha\boldsymbol{a}) = \alpha\beta\boldsymbol{a}$ が成り立つ. (**スカラー倍の合成はスカラー倍**)
   - $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ が成り立つ. (**スカラー倍の単位元**)
   - $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$ が成り立つ. (**スカラー倍の分配法則の成立**)
   - $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$ が成り立つ. (**スカラー倍の分配法則の成立**)

n 次元実数ベクトルは, これらの **8 つの代数的性質**を持つことが分かった.

3.2.2 ベクトルの再定義と線形空間

さて, ここからはいよいよ, **ベクトルの再定義**を始めよう.

今までは, **(1)** n 個の実数成分を縦に並べ, **(2)** 向きと大きさを持つ量を表現 し,
(3) それを「ベクトル」と呼んできた. そしてそのように n 個の成分を並べて表した「ベクトル」は,
(4) たまたま, 上に示したような 2 つ ＋ 8 つの性質を満たしていた.

ここで, 大胆に発想を転換しよう. すなわち,

- 何かの方法で定義されたベクトルが, **たまたま前述の性質を満たす** のではなく $\cdots$
- 前述の性質を満たすものは, **全てベクトルであるとみなす** のである.

つまりどういうことかというと $\cdots$

ある空間 V ($\mathbb{R}^n$ みたいな, 何か共通の性質を持ったもの全体がなす集合) を考える.
その空間 V の任意の元 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ をとる.

もし, その $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が前述の **2 つ+8 つの性質を満たす**のならば, V の元は**ベクトルである**. そう考えるということである. (V の元は, 別に**向きと大きさを持った量でなくても良い**. これが**重要**である.)

そして, このような性質を持つ空間 V を, **線形空間 (linear space)** と呼ぶ.

definition : ベクトルの定義と線形空間

ある空間 V について, $\forall\boldsymbol{a}, \forall\boldsymbol{b}, \forall\boldsymbol{c} \in V$, $\forall\alpha, \forall\beta \in \mathbb{R}$ をとったとき,

1. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in V$ **(V は和について閉じている)**
2. $\alpha\boldsymbol{a} \in V$ **(V はスカラー倍について閉じている)**

が成り立ち, さらに以下に示す **8 つの代数的規則**,

1. **和**についての規則
   - $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ が成り立つ. (**和の交換法則の成立**)
   - $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ が成り立つ. (**和の結合法則の成立**)
   - $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}_V=\boldsymbol{a}$ を満たす V の元 $\boldsymbol{0}_V$ が, 唯一存在する. (**ゼロベクトルの存在と一意性**)
   - $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}_V$ を満たす V の元 $-\boldsymbol{a}$ が, $\boldsymbol{a}$ に対して唯一定まる (**逆元の存在と一意性**)
2. **スカラー倍**についての規則 ($\forall\alpha, \forall\beta \in \mathbb{R}$)
   - $\alpha(\beta\boldsymbol{a})=\beta(\alpha\boldsymbol{a})=\alpha\beta\boldsymbol{a}$ が成り立つ. (**スカラー倍の合成はスカラー倍**)
   - $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ が成り立つ. (**スカラー倍の単位元**)
   - $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$ が成り立つ. (**スカラー倍の分配法則の成立**)
   - $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$ が成り立つ. (**スカラー倍の分配法則の成立**)

を満たすならば, V の任意の元を**ベクトル (vector)** と呼ぶ.
また, V を $\mathbb{R}$ **上の線形空間 (linear space on $\mathbb{R}$)**, または **$\mathbb{R}$-線形空間 ($\mathbb{R}$-linear space)** という.
(線形空間と呼ぶかわりに, **ベクトル空間**と呼ぶこともある.)

「$\mathbb{R}$ 上の」の意味は, V は**スカラーとして実数 ($\mathbb{R}$) を持つ**ということである.
これは結構大切なことで, 例えば, **V のスカラーとして複素数 ($\mathbb{C}$) を採用しても良い**ならば, V は $\mathbb{C}$ **上の線形空間**といえるし, もっと一般的に, スカラーとして空間[1] K の元を採用できるならば, V は **体 K 上の線形空間**と言えるのである. こんな風に, 数学はどんどん一般化されて行くわけだ.

問題 30 n 次元実数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ が, $\mathbb{R}$ 上の線形空間を成すことを示せ.

このように,「ベクトル」という数を新しく定義しなおしたわけであるが, 一体それによってどんなことが起きるのだろうか. 実は, **今まではベクトルとは程遠いと思っていたものが実はベクトルであるということが, 次々に明らかになる**のである.

例題 n 次実正方行列全体が成す集合を $M(n;\mathbb{R})$ とし, $\forall A, \forall B \in M(n;\mathbb{R})$ をとる.

まず, **正方行列の和はやはり正方行列**であり, **正方行列の実数倍はやはり正方行列**である. よって,

- $A+B \in M(n;\mathbb{R})$
- $\alpha A \in M(n;\mathbb{R})$ ($\forall\alpha \in \mathbb{R}$)

[1] スカラーとして採用する空間 (体) を, **基礎体**という.

すなわち, $M(n;\mathbb{R})$ は, **和とスカラー倍について閉じている**.

さらに, $M(n;\mathbb{R})$ の元 (n 次実正方行列) は, 明らかに **8 つの代数的規則**を満たす (自分で確かめてみよう).
よって, $M(n;\mathbb{R})$ は, $\mathbb{R}$ 上の線形空間を成す.

$\therefore$ $M(n;\mathbb{R})$ の元, すなわち, n **次実正方行列はベクトルである!!**　　//

この結論は, 今までであれば考えられなかったことである.
今までは, 行列とベクトルは相異なるものであり, 行列がベクトルであるとは到底言えなかったのである.
ところが, ベクトルというものを**抽象的に再定義**したところ, **正方行列はベクトルである**という, 何とも驚くべき結論が得られたのだ. このような驚きの例は, まだ他にもある.

例題　定数係数線形斉次 2 階微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0.$$

を考え, この微分方程式の 2 つの解を y_1, y_2 とする. また, この微分方程式の解空間を S とする.

まず, y_1+y_2 が微分方程式の解となる (すなわち, S の元となる) ことを示そう.

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2(y_1+y_2)}{dx^2}+b\frac{d(y_1+y_2)}{dx}+c(y_1+y_2)\\
=\;&\frac{d^2y_1}{dx^2}+\frac{d^2y_2}{dx^2}+b\frac{dy_1}{dx}+b\frac{dy_2}{dx}+cy_1+cy_2\\
=\;&\underbrace{\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}+b\frac{dy_1}{dx}+cy_1\right)}_{=0\ (y_1\text{は解だから})}+\underbrace{\left(\frac{d^2y_2}{dx^2}+b\frac{dy_2}{dx}+cy_2\right)}_{=0\ (y_2\text{は解だから})}=0. \qquad \therefore y_1+y_2\in S.
\end{aligned}$$

次に, αy_1 ($^\forall\alpha\in\mathbb{R}$) が微分方程式の解となる (すなわち, S の元となる) ことを示そう.

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2(\alpha y_1)}{dx^2}+b\frac{d(\alpha y_1)}{dx}+c(\alpha y_1)\\
=\;&\alpha\frac{d^2y_1}{dx^2}+\alpha b\frac{dy_1}{dx}+\alpha cy_1\\
=\;&\alpha\underbrace{\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}+b\frac{dy_1}{dx}+cy_1\right)}_{=0\ (y_1\text{は解だから})}=0. \qquad \therefore \alpha y_1\in S.
\end{aligned}$$

$\therefore$ 微分方程式の解空間 S は, 和とスカラー倍について閉じている.

また, y_1, y_2 は実関数であり, **8 つの代数的規則を満たす** (自分で確かめてみよう).
よって, S は $\mathbb{R}$ 上の線形空間を成す.

$\therefore$ S の任意の元, すなわち, **定数係数線形斉次 2 階微分方程式の解はベクトルである!!**　　//

何と, 微分方程式の解までもが, ベクトルであることが示されてしまった.
ちなみにこの考え方は, 定数係数線形斉次 2 階微分方程式の一般解を記述するために実際に使われている.
すなわち, **微分方程式の理論に, 線形代数学が利用されている**のである[2]

[2]定数係数線形斉次 2 階微分方程式の一般解 y が, 2 つの基本解 y_1, y_2 により $y=C_1y_1+C_2y_2$ (C_1, C_2は任意定数) と書けるのは, y_1, y_2 をベクトルとみなし, それらの線形結合を考えているからである. 定数係数線形斉次 2 階微分方程式の解空間 S は, y_1, y_2 を基底として張られる線形空間であり, C_1, C_2 を自由に動かすことで, S の任意の元, すなわち, 微分方程式の任意の解が表せる.
2 本の線形独立なベクトル (基底) が平面を張り, その 2 本の基底の線形結合によって平面上の任意のベクトルが表せるというのと, **考え方としては全く同じ**である. 解析学に線形代数が応用されてるって, なんか凄いですよね.

問題 31 実数体 $\mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ 上の線形空間を成すことを示せ.

問題 32 x についての 3 次整関数 $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 全体が成す集合を $P_3[x]$ としたとき, $P_3[x]$ が $\mathbb{R}$ 上の線形空間を成すことを示せ. ($^\forall a_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, 3$ とする)

3.2.3 線形独立, 線形従属

ベクトルの定義をもう一度しなおしたところで, **今まではベクトルとは異なると思っていたものが実はベクトル**であることが明らかになったり, とにかく今までとは違う世界を少しだけ垣間見ることが出来たのではないだろうか. 線形代数学の再構築作業は, まだまだ続く.

復習 : ベクトルの線形独立性, 線形従属性

ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ について,

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

を, **線形関係式 (linear structural relationships)** という.

1. 線形関係式を満たす係数の組 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ が $(0, 0, \cdots, 0)$ のみならば,
ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は, 互いに**線形独立 (lineary independent)** であるという.
2. 線形関係式を満たす係数の組 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ に, **1 つでも, 0 でない係数が存在**するのならば,
ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は, 互いに**線形従属 (lineary dependent)** であるという.

今度は, 新たに定義した「ベクトル」の, 線形独立, 線形従属性を定義してみよう.

definition : 線形結合, 線形関係式

1. **線形結合**

   V を $\mathbb{R}$ 上の線形空間としたとき, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ を考える.

   $$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n \quad (c_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \cdots, n)$$

   を, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の**線形結合 (linear combination)** という.

2. **線形関係式**

   ベクトル ($\mathbb{R}$ 上の線形空間 V の元) の組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ について,

   $$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}_V \quad (c_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \cdots, n)$$

   を, **線形関係式 (linear structural relationships)** という.

この定義は, ベクトルの再構築前の定義と, 全く同様であることが分かると思う.
そして, この線形関係式を使って, ベクトルの**線形独立, 線形従属**を定義しよう.

definition : ベクトルの線形独立性, 線形従属性

線形空間 V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ について,

1. 線形関係式を満たす係数の組 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ が $(0, 0, \cdots, 0)$ のみならば,
   ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は, 互いに**線形独立 (lineary independent)** であるという.
2. 線形関係式を満たす係数の組 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ に, **1 つでも, 0 でない係数が存在**するのならば,
   ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は, 互いに**線形従属 (lineary dependent)** であるという.

これが, ベクトルの線形独立性, 線形従属性の定義である. 実数ベクトル ($\mathbb{R}^n$) のベクトルの線形関係の問題は今まで散々練習したので, ここで改めて問題を解き直す必要は無いだろう.

ということで, これから, **線形空間 V の元としての,「抽象的」なベクトルの線形関係**を調べてみようと思う. つまり, 向きを持った量とは限らないベクトルについて考えるのである.

例題 x に関する n 次実係数多項式全体が成す $\mathbb{R}$ 上の空間 $P_n[x]$ を考える.
$x^n, x^{n-1} \in P_n[x]$ が互いに線形独立であることを示せ.

x^n, x^{n-1} が線形独立であることを示す方針は,

1. まず, 線形関係式を立てる.
2. $c_1 = c_2 = 0$ となることを示す.

つまり, 結局の所は今までと全く一緒である.

というわけで, まずは線形関係式を立てると, 以下のようになる.

$$c_1 x^{n-1} + c_2 x^n = 0 \quad (\text{右辺は}, P_n[x] \text{ のゼロベクトル})$$

さて, 今までと何かが違うことに気づいただろうか.
実数ベクトルの場合は, 線形関係式が等質連立 1 次方程式となっていたので, 簡単に c_1, c_2 を求めることができた. が, この線形関係式を見ると, どうやら**等質連立 1 次方程式とはなっていない**ようである.

このように, 一般のベクトルに対しての線形関係式を解くことは, **パターンを覚えているだけでは無理**である. つまり,「解くためのちょっとした工夫」をうまく見つけられるかどうかが, このような問題を解くキーポイントとなるのだ.

この線形関係式を解くには, **微分**を上手く利用することが考えられる. 線形関係式の両辺を x で微分すると,

$$(n-1)c_1 x^{n-2} + nc_2 x^{n-1} = 0.$$

という関係式が得られる. 微分により, **関係式をひとつ増やすことに成功した**のである. あとは, もとの線形関係式と連立し, 行列表示にすると,

$$\begin{pmatrix} x^{n-1} & x^n \\ (n-1)x^{n-2} & nx^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

何と, 等質連立 1 次方程式に持ち込むことができた. つまり, 係数行列を A とおけば, $|A| \neq 0$ なら $c_1 = c_2 = 0$ (自明な解) となり, $|A| = 0$ なら, $c_k \neq 0$ なる k が存在することになる. すなわち,

係数行列を次のように置く.

$$A = \begin{pmatrix} x^n & x^{n-1} \\ \frac{d}{dx}x^n & \frac{d}{dx}x^{n-1} \end{pmatrix}$$

- $|A| \neq 0 \ \Rightarrow \ c_1 = c_2 = 0$（自明な解）, すなわち, x^n, x^{n-1} は線形独立.
- $|A| = 0 \ \Rightarrow \ c_1 = c_2 = 0$ 以外の解（非自明な解）が存在. すなわち, x^n, x^{n-1} は線形従属.

結局のところ, 係数行列 A の行列式 $|A|$ によって, 線形関係が決まることが分かった. $|A|$ を計算すると,

$$|A| = nx^{2(n-1)} - (n-1)x^{2(n-1)} = x^{2(n-1)} \neq 0.$$

よって, $|A| \neq 0$ より, $c_1 = c_2 = 0$. つまり, x^n, x^{n-1} は線形独立である.　　//

※ $|A|$ は, **どこか一点でゼロでない**ことを示せれば, それだけで線形独立であると示せたことになる.

例題 少なくとも 1 階微分可能な x の関数全体が成す $\mathbb{R}$ 上の線形空間を $C^1[x]$ とするとき,
$e^x, e^{2x} \in C^1[x]$ が互いに線形独立であることを示せ.

このような場合にも, 先程と全く同様の方法で線形関係を判定することができる. 線形関係式を立てると,

$$c_1e^x + c_2e^{2x} = 0.$$

両辺を x で微分して関係式を増やすと,

$$c_1e^x + 2c_2e^{2x} = 0.$$

これらを連立し, 行列表示すると,

$$\begin{pmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

あとは, 係数行列の行列式を計算すると,

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x} \neq 0. \quad \therefore c_1 = c_2 = 0 \text{ より}, e^x, e^{2x}\text{は線形独立である.} \qquad //$$

このように, 線形関係式の微分を上手に利用することによって, 関数の線形関係を判定できることが分かった. この判定法は非常に有名な方法なので, 以下に改めてまとめておく.

theorem : Wronski 行列式による関数の線形関係の判定法

n 階微分可能な関数の組 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ を考える.

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ \frac{df_1(x)}{dx} & \frac{df_2(x)}{dx} & \cdots & \frac{df_n(x)}{dx} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^nf_1(x)}{dx^n} & \frac{d^nf_2(x)}{dx^n} & \cdots & \frac{d^nf_n(x)}{dx^n} \end{vmatrix} \quad \text{とすると,}$$

1. $W \neq 0$ **(どこか 1 点で示せば良い)** のとき, $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ は互いに**線形独立**.
2. $W = 0$ **(恒等的に)** のとき, $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ は互いに**線形従属**.

W を, **Wronski 行列式 (ロンスキアン)** という.

とりあえずロンスキアンを紹介しておいたが, 別に**ロンスキアンを覚える必要はない**. 関数の線形関係を判定しろと言われたら, いつものように線形関係式を立てて, 両辺を微分して関係式を増やし $\cdots$ という手順を踏めば, **ロンスキアンは自ずと導かれる**のである.

ちなみに, ロンスキアンは, 定数係数 2 階線形斉次微分方程式の一般解の理論で大活躍する (3 年の数学で習った覚えはないだろうか). ここでもやはり, 解析学で線形代数が使われるのである.

問題 33 $\sin nx, \cos mx$ $({}^\forall n, {}^\forall m \in \mathbb{Z})$ が互いに線形独立であることを示せ.

問題 34 $e^x, 2e^x, e^{2x}$ が互いに線形従属であることを示せ.

問題 35 n 階微分可能な関数の組 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ を考えたとき,

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ \frac{df_1(x)}{dx} & \frac{df_2(x)}{dx} & \cdots & \frac{df_n(x)}{dx} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^n f_1(x)}{dx^n} & \frac{d^n f_2(x)}{dx^n} & \cdots & \frac{d^n f_n(x)}{dx^n} \end{vmatrix}$$

を用いて, 前頁の方法により線形関係が正しく判定できることを示せ.

3.2.4 線形空間の基底

例えば, $\boldsymbol{e}_1 = \binom{1}{0}, \boldsymbol{e}_2 = \binom{0}{1}$ を考える. これら 2 つの元が**張る空間**,

$$\mathbb{R}^2 = \{c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 \mid {}^\forall c_1, {}^\forall c_2 \in \mathbb{R}\}$$

を考えたとき, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を, $\mathbb{R}^2$ の**基底**であるといった. 基底とはすなわち, **その空間を作り出すベース**となるベクトルの組のことであったが, 一般の線形空間についても, 基底というものを定義してみよう.

definition： 基底と, 張る空間

線形空間 V の**任意の元** $\boldsymbol{x}$ を, あるベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ の**線形結合 (liner combination)** によって,

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n \quad (c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \cdots, n)$$

と表せるとき, ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を, 線形空間 V の**基底 (bases)** という.

また, このときの V を, 基底の組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が**張る空間**という.

先程の例でいうと, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は, $\mathbb{R}^2$ の**基底**であり, 基底の組 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ が張る空間は, $\mathbb{R}^2$ である.

結局のところ, 以前学んだ「基底」の定義と全く同様の定義である.

例題 x についての実係数線形関数全体が成す $\mathbb{R}$ 上の線形空間を $P_1[x]$ とする.
このとき, $\{1, x\}$ が $P_1[x]$ の一組の基底となることを示せ.

まず, $\{1, x\}$ が互いに線形独立であることを示すために, ロンスキアンを計算すると,

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

よって, $\{1, x\}$ は, 互いに線形独立な $P_1[x]$ のベクトルの組であるといえる.

また, $^{\forall} f(x) \in P_1[x]$ をとると, $f(x) = c_1 \times 1 + c_2 \times x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ と, $\{1, x\}$ の線形結合で $f(x)$ を必ず表すことができる. よって, $\{1, x\}$ は基底の条件を満たすので, $P_1[x]$ の一組の基底である. //

問題 36 2 次実正方行列全体が成す $\mathbb{R}$ 上の線形空間を $M(2; \mathbb{R})$ とおいたとき,
行列単位の組 $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ が $M(2; \mathbb{R})$ の一組の基底となることを示せ.
ただし, E_{ij} は, (i, j) 成分のみが 1 で, 他の成分は 0 であるような 2 次の正方行列を表す.

問題 37 n 次実係数多項式全体が成す $\mathbb{R}$ 上の線形空間を $P_n[x]$ とする. $P_n[x]$ の一組の基底を求めよ.

3.2.5 線形空間の次元

線形空間の**次元**を, 線形空間の基底を使って定義しよう.

definition : 線形空間の次元

線形空間 V の基底の個数 n を, 空間 V の**次元 (dimension)** といい,

$$\dim V = n$$

と表す. ただし, $V = \{\mathbf{0}_V\}$ とき, $\dim V = 0$ と定義しておく.
一般に, **次元よりも多いの本数の基底をとることは不可能**である.

この定義も, 今までと全く同様の定義であるから, あまり迷うことは無いだろう.

問題 38 問題 36.37 の $\mathbb{R}$ 上の線形空間について, それぞれの次元を求めよ.

3.2.6 部分空間

線形空間の**部分空間**という考え方も定義しよう.

definition : 部分空間

$\mathbb{R}$ 上の線形空間 V の**部分集合** W を考える. $^{\forall}\boldsymbol{a}_1, {}^{\forall}\boldsymbol{a}_2 \in W$ について,

- $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \in W$ (W は和について閉じている)
- $\alpha \boldsymbol{a}_1 \in W$ (W はスカラー倍について閉じている)

が満たされるならば, W を, V の**部分空間 (subspace)** という.

部分空間とは, **線形空間の中にある線形空間**である. 例えば, 以下の例を考えてみよう.

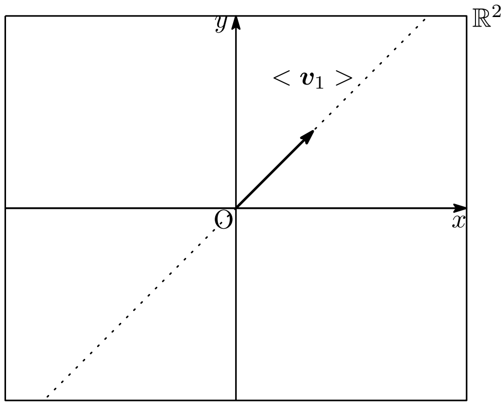
例題 2 次元実数ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ は, $\mathbb{R}$ 上の線形空間である.
このとき, 以下に示すベクトル $\boldsymbol{v}_1$ が張る空間 $< \boldsymbol{v}_1 >$ を考える.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ < \boldsymbol{v}_1 > = \ \{c_1 \boldsymbol{v}_1 \mid {}^{\forall} c_1 \in \mathbb{R}\}$$

このとき, $< \boldsymbol{v}_1 >$ は, $\mathbb{R}^2$ の**部分空間**である. このことを以下のように順番に考えてみよう.

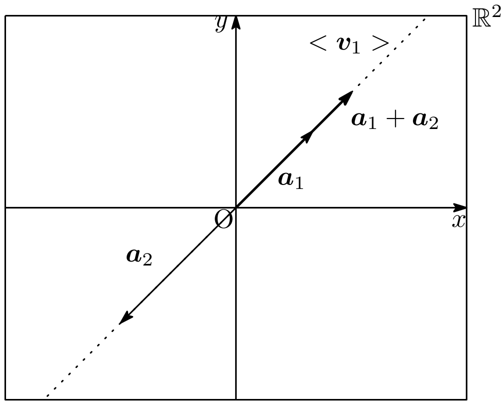
1. 幾何学的に（イメージを掴みやすく）
2. 数式を使って（厳密に）

1. **幾何学的に考えてみる**

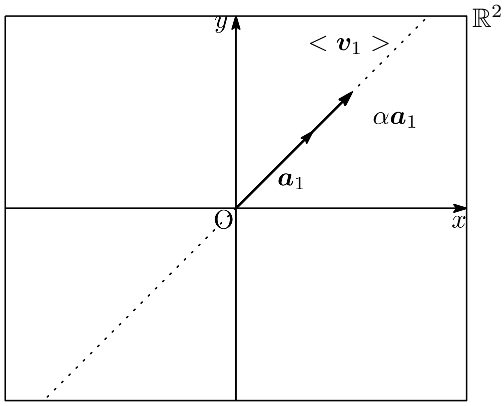


まず, $\mathbb{R}^2$ の上に $< \boldsymbol{v}_1 >$ を描くと, 上図のようになる. 平面 $\mathbb{R}^2$ の上に直線 $< \boldsymbol{v}_1 >$ が乗っていることが分かるだろう. このとき, 次のようなことを考えてみよう.

$< \boldsymbol{v}_1 >$ の任意の元 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ について, 明らかに, それらの和は $< \boldsymbol{v}_1 >$ の元となる.



スカラー倍 $\alpha\boldsymbol{a}_1$ ($^\forall\alpha \in \mathbb{R}$) についても, 明らかに $<\boldsymbol{v}_1>$ の元となる.



よって, $<\boldsymbol{v}_1>$ は, $\mathbb{R}^2$ **の中で, やはり** $\mathbb{R}$ **上の線形空間を成している**ことが分かる.
このようなとき, $<\boldsymbol{v}_1>$ は $\mathbb{R}^2$ の**部分空間である**というのである.

このように, 幾何学的に考えることにより, 直感的な理解を得ることが出来たと思う. 数学は厳密さが重視される学問だが, 直感的なイメージをもつことも非常に重要である. 部分空間のイメージを, ここでしっかりと掴んでおこう. そうすれば, これからの線形代数学の見通しがとても良くなる.

2. **数式を使って考えてみる**

今度は, 数式を使って厳密に, $<\boldsymbol{v}_1>$ が $\mathbb{R}^2$ の部分空間を成すことを示そう.

$^\forall\boldsymbol{a}_1, ^\forall\boldsymbol{a}_2 \in <\boldsymbol{v}_1>$ について,

$$<\boldsymbol{v}_1>=\{c\boldsymbol{v}_1 \mid {}^\forall c \in \mathbb{R}\} \quad (\text{すなわち}, \boldsymbol{v}_1\text{の実数倍全体が成す集合})$$

なので,$<\boldsymbol{v}_1>$ の元 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は, 次のように表せる.

$$\boldsymbol{a}_1 = c_1\boldsymbol{v}_1\ ,\ \boldsymbol{a}_2 = c_2\boldsymbol{v}_1 \quad ({}^\exists c_1, {}^\exists c_2 \in \mathbb{R}).$$

ここで, 和 $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ について考えると,

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = (c_1 + c_2)\boldsymbol{v}_1 = \gamma\boldsymbol{v}_1 \in <\boldsymbol{v}_1>. \quad (\gamma = c_1 + c_2 \in \mathbb{R})$$

$\therefore <\boldsymbol{v}_1>$ は和について閉じている.

次に, スカラー倍 $\alpha\boldsymbol{a}_1$ ($^\forall\alpha \in \mathbb{R}$) についても考えると,

$$\alpha\boldsymbol{a}_1 = \alpha c_1\boldsymbol{v}_1 = \delta\boldsymbol{v}_1 \in <\boldsymbol{v}_1>. \quad (\delta = \alpha c_1 \in \mathbb{R})$$

$\therefore <\boldsymbol{v}_1>$ はスカラー倍について閉じている.

以上より,

$<\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2>$ は**和とスカラー倍について閉じている**.

と示せたので, $<\boldsymbol{v}_1>$ は $\mathbb{R}^2$ **の部分空間**である. //

このように, **直感的に**も, **数学的に**も, $<\boldsymbol{v}_1>$ が $\mathbb{R}^2$ の部分空間を成すことを示すことができた. 部分空間のイメージを, 何となくでも掴むことができただろうか.
部分空間とはすなわち, **線形空間の中にある線形空間**のことある. このことをしっかりと頭に入れておこう.

問題 39 $\mathbb{R}^n$ の原点 O を通る $n-1$ 以下の次元の空間は, $\mathbb{R}^n$ の部分空間を成す.
このことを, $n=3$ の場合を例として説明せよ.

問題 40 $V=\mathbb{R}^3$ を, 3 次元実数ベクトル空間とする.
また, $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル列 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5$ の各項を以下のように定義する.

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}4\\7\\9\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_5=\begin{pmatrix}11\\11\\3\end{pmatrix}.$$

このとき, $<\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_5>$ が V の部分空間を成すことを示し, また, $<\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_5>$ の次元を求めよ.
ただし, $<\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_5>=\{\sum_{k=1}^{5} c_k\boldsymbol{v}_k \mid c_i\in\mathbb{R}, i=1,2,3,4,5\}$ とする.　**(H22 東北大学)**

問題 41 $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間 L の基底と次元を求めよ. **(H20 北海道教育大学)**

$$L=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1-2x_2+x_3=0\right\}$$

問題 42 行列 A について, 以下の問に答えよ.

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$$

1. A の固有値と固有ベクトル, 固有空間を全て求めよ.
2. A の全ての固有空間が, それぞれ $\mathbb{R}^2$ の部分空間を成すことを示せ.