

# 正射影ベクトル

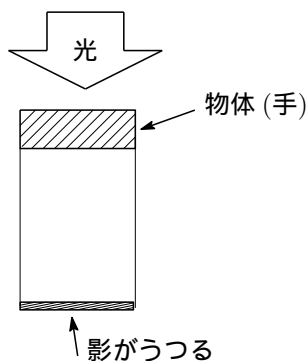
<http://ameblo.jp/dwave/>

## 1 正射影

▷ 正射影ベクトルをマスターする上で、当然知っておかなければならないのは正射影とは何かということです。まずは正射影 (orthogonal projection) について考えます。

### 1.1 射影とは影のこと

▷ みなさんは、手で動物の形を作って、影絵で遊んだ経験はありませんか。



こんなふうに、何かに光を当てて写した影のことを射影 (projection) といいます。

例えば、子供の頃に手で作って遊んだ影絵は射影です。

### 1.2 正射影

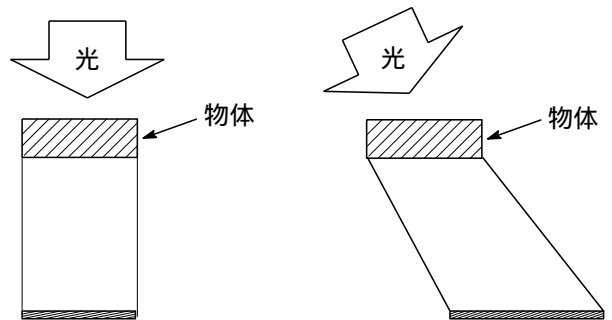
▷ 正射影というのは、射影の特別な場合なんです。

たとえば、影絵をスクリーンに映すことを考えてみてください。影絵が一番綺麗に映るのは、光をどんな角度で当てた時だと思いませんか？

光はいろいろな当て方 (角度) があり得ますが、何となく、スクリーンに対して垂直に光を当てると、影

が綺麗に映るような気がしませんか？

下図においては、左 (スクリーンに対して垂直に光を当てている) のほうが影が綺麗に映りそうですね。



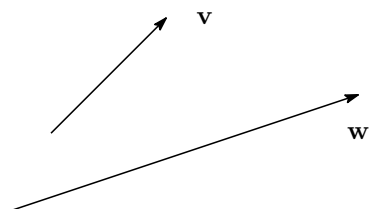
こんな風に、一番綺麗に影が映るように光を当てたとき、つまりスクリーンに対して垂直に光を当てたときに出来る影を正射影といいます。

手で影絵を作るとき、何となく作りたくなるのは正射影のほうです。暇なときに試してみてください。

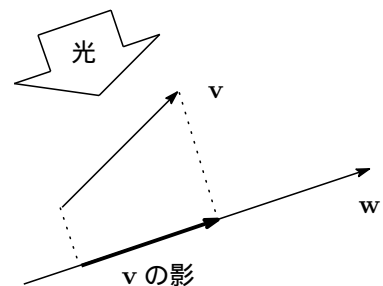
## 2 正射影ベクトル

▷ というわけで、簡単に正射影の意味を説明しましたので、これから正射影ベクトル (orthogonal projection vector) について考えます。

任意の平面ベクトル  $v, w$  を用意します。



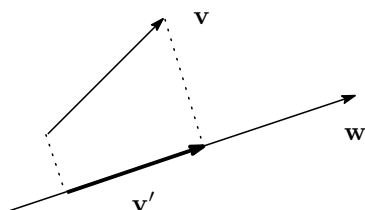
いまから、 $w$  をスクリーンに見立てて、 $v$  の正射影を  $w$  の上を作ってみます。つまり、 $w$  に垂直な方向から光を当てて、 $w$  の上に  $v$  の影を作るといことです。



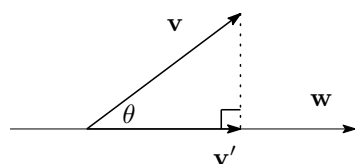
この  $v$  の影を,  
 ” $v$  の  $w$  への正射影ベクトル” といいます.  
 (以後、 $v$  の影ではなく  $v'$  と呼ぶことにします).

## 2.1 正射影ベクトルの長さ

▷ 正射影ベクトルの色々な性質について、数学的観点から観察してみましょう。まずは、正射影ベクトルはどのくらいの長さを持つのか? ということについて。



まずは、 $w$  と  $v'$  は平行なので、 $v$  と  $w$  が成す角が  $\theta$  ならば、 $v$  と  $v'$  が成す角も  $\theta$  です。



この図を見ればもう明らかですね。正射影ベクトル  $v'$  の長さは、 $\theta$  を使って次のようにあらわせます。

$$|v'| = |v| \cos \theta$$

## 2.2 正射影ベクトルを求める

▷ いよいよ、正射影ベクトルがどのようなベクトルになるのかを求めてみます。

その際、次のような方針をとるので、求め方の全体像として頭に入れておいてください。

1.  $w$  ベクトルと同じ向きで、長さが 1 のベクトル ( $w$  の単位方向ベクトル) を求める。
2. そのベクトルに、 $|v'|$  をかける。
3.  $w$  と平行で、長さが  $|v'|$  のベクトルが出来る。  
 ⇒ 正射影ベクトル  $v'$  の出来上がり!!

以上。この方針にしたがって、正射影ベクトルを求めてみましょう。

## 2.3 スタートは内積

▷ 最初に、 $v$  と  $w$  の内積 (inner product) を考えます。詳しい説明は省きますが、2 つのベクトルの内積は次式で定義されています。

$$v \cdot w = |v||w| \cos \theta$$

ところで、先程得た式を思い出してみてください。

$$|v'| = |v| \cos \theta$$

この結果を使い、内積の定義を書き直すと...

$$v \cdot w = |v'| |w|$$

$$\therefore |v'| = \frac{v \cdot w}{|w|}$$

おっ、何だか面白い結果が得られましたね。

## 2.4 $w$ の単位方向ベクトル

▷  $w$  の方向ベクトルとは、 $w$  と平行なベクトルのことです。さらに「単位」方向ベクトルという、それは長さが 1 の方向ベクトルを意味します。

$w$  の単位方向ベクトルを求めるには、どうすれば良いのでしょうか? それには、線形代数やベクトル解析を学ぶ上で基本となるあるテクニックを使います。

たとえば、任意の方向を向いていて長さが 2 のベクトルを、長さである”2”で割ってみます。そのベクトルはどんなベクトルになるでしょう?

お分かりいただけただしょうか。これは長さが 1 で、方向がもとのベクトルと同じベクトルとなります。

テクニック

任意のベクトル  $v$  の単位方向ベクトルは、

$$\frac{v}{|v|}$$

である。(  $v$  を、その長さで割ったもの)

よって、 $w$  の単位方向ベクトルは

$$\frac{w}{|w|}$$

となります。さあ、正射影ベクトルまであと一息!!

## 2.5 $v'$ を求める

▷ さて、 $v'$  の長さ、 $w$  の単位方向ベクトルが求められました。最初の方針に従えば、正射影ベクトルはもうすぐそこです。

$$|v'| = \frac{v \cdot w}{|w|}$$

$w$  の単位方向ベクトル  $\frac{w}{|w|}$

これらを単純にかければ、それは紛れもない  $v$  の  $w$  への正射影ベクトル  $v'$  ですね。

$$v' = \frac{v \cdot w}{|w|} \frac{w}{|w|} = \frac{v \cdot w}{|w|^2} w$$

というわけで、これが正射影ベクトルの公式です。お疲れ様でした!

### 正射影ベクトルの公式

任意のベクトル  $v, w$  を考えたとき、 $v$  を  $w$  に正射影したベクトル  $v'$  は、次のように求められる。

$$v' = \frac{v \cdot w}{|w|^2} w$$