2009 02/10(THU)　Presented by Minami

Quad Erat Demonstrandum? : http://ameblo.jp/dwave/

■ Rayleigh 商と,2 次形式の最大値, 最小値

▹ 2 次形式の最大値, 最小値を求めるとき,**Rayleigh 商 (Rayleigh's quotient)** という考え方を用いると, 非常にスマートに問題を解くことができます. 今日はとっても便利な Rayleigh 商の性質をご紹介したあとに, それを使って 2 次形式の最大値を求める問題をやってみましょう.

※この資料では,2 次形式は全ての項が 2 次の項から成るものしか扱わないことにします.

1　2 次形式

▹ 2 次形式 (quadratic form) とは, 全ての項が 2 次の項から成る, 次のような式のことを言います.

$$f(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+gzx$$

$$f(x,y)=ax^2+by^2+cxy$$

2 次形式は必ず, 次のような**行列表示**に直すことができます.

$$f(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+gzx=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & d/2 & g/2\\ d/2 & b & e/2\\ g/2 & e/2 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$$

$$f(x,y)=ax^2+by^2+cxy=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c/2\\ c/2 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$$

行列 A のことを,2 次形式の係数行列といい, 係数行列は, 対称行列です.
(上を見ても, 係数行列は対称行列になってますよね) 任意の 2 次形式は, 必ず**対称行列を係数行列として持つ**行列表示に直すことができます. この, **必ず係数行列が対称行列になる**ってのがミソなのだ.

2　標準 2 次形式

▹ 2 次形式は, 係数行列をうまく対角化することによって, 次のような形の**標準 2 次形式 (normal quadratic form)** に変形することができます.2 次形式を標準 2 次形式に変形することを,2 次形式の**標準化**といいます.

$$f(X,Y,Z)=aX^2+bY^2+cZ^2$$

$$f(X,Y)=aX^2+bY^2$$

この資料でのメインの話題は標準化ではないので, ここでは結果だけ述べておきますが, ある係数行列 A による 2 次形式を標準化すると,**A の固有値を係数として持つ, 標準 2 次形式**に必ず変形できます.

$$f(X,Y,Z)=\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\lambda_3Z^2$$

$$f(X,Y)=\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2$$

任意の 2 次形式は, 係数行列の固有値を係数として並べた標準 2 次形式に変形できるワケです.

3　2次形式の最大値と最小値

▷ 2 次形式は, ある特定のパターンにおいては簡単に最大値, 最小値を求められます. それは, 以下のようなパターンのときです.

$\dfrac{{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}$ の最大値, 最小値を求めるパターン.

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると, $\dfrac{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{x^2+y^2}$ と書けます.この形の最大値, 最小値を求めるのは簡単です.

そして, そのときに使うのが,**Rayleigh 商**という武器なのです.

4　Rayleigh 商

▷ 2 次形式 $f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を考えたとき, 次の $R_A(\boldsymbol{x})$ を,2 次形式 $f(\boldsymbol{x})$ の **Rayleigh 商**といいます.

$$R_A(\boldsymbol{x}) = \frac{{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}$$

Rayleigh 商は, とっても便利な性質をもっています.2 つほど紹介しましょう.

性質 1	$\lambda_{\min} \leq R_A(\boldsymbol{x}) \leq \lambda_{\max}$　($\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$は, A の最小, 最大固有値)
性質 2	$\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_{\min}, \boldsymbol{x}_{\max}$ とすると, $R_A(\boldsymbol{x}_{\min}) = \lambda_{\min}, R_A(\boldsymbol{x}_{\max}) = \lambda_{\max}$

気合いを入れればこれらの性質は証明できます. 是非是非やってみてください.
(証明には **2 次形式の標準化**を使います)

この 2 つの性質は, 次のような事実を示唆しています.

- $R_A(\boldsymbol{x})$ は最大でも$\lambda_{\max}$, 最小でも$\lambda_{\min}$の値しか取らない.
- $\boldsymbol{x}$ に, 最大, 最小固有値に対応する固有ベクトルを入れた時の $R_A(\boldsymbol{x})$ の値は$\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$.

この 2 つから考えると, 次の重要な事実が得られます.

$R_A(\boldsymbol{x}) = \dfrac{{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}$ の最大値は $\lambda_{\max}$, 最小値は $\lambda_{\min}$.

しかも, その時の $\boldsymbol{x}$ は $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ に対応する固有ベクトルなわけです.
この事実を使えば, **最大値, 最小値をとるときの x, y に関する条件が求められます**.
(次のページの例を見れば意味がわかるはず)

習うより慣れろとはよく言ったものです. 早速次のページで問題を解いてみましょう.

5 実際に問題を解いてみる

▷ では, 実際に Rayleigh 商を使って問題を解いてみます.

> $x^2+y^2=1$ のもとで, $f(x,y)=x^2+4\sqrt{2}xy+3y^2$ の最大値, 最小値, および,
> それらを与える x,y の条件を求めよ. (東工大の入試問題)

まず,$f(x,y)$ は 2 次形式なので, 行列表示に直してみます.

$$f(x,y)={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

んで,Rayleigh 商を作ります.

$$R_A(x,y)=\frac{{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\Big/(x^2+y^2)$$

Rayleigh 商の最大値, 最小値は, 係数行列の最大, 最小固有値に対応していたので, 係数行列の固有方程式を解いて固有値を求めると,

$$\lambda^2-4\lambda-5=0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda-5)(\lambda+1)=0 \quad \text{より}, \quad \lambda_{\max}=5, \lambda_{\min}=-1.$$

よって,$R_A(\boldsymbol{x})$ の最大値は 5, 最小値は -1 と分かりました. そして, 最大値, 最小値をとるときの $\boldsymbol{x}$ は,$\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ に対応する固有ベクトルだったので,

- $\lambda_{\max}=5$ について,

$$\begin{pmatrix}-4 & 2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \qquad \therefore \sqrt{2}x=y.$$

- $\lambda_{\min}=-1$ について,

$$\begin{pmatrix}2 & 2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \qquad \therefore x=-\sqrt{2}y.$$

ところで, 問題文をよく読むと,$x^2+y^2=1$ という条件が与えられていました. ということは,Rayleigh 商は書き換えることができます.

$$R_A(\boldsymbol{x})=\frac{{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}}{\underbrace{x^2+y^2}_{\text{条件より},x^2+y^2=1}}={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=f(x,y)$$

よって, 結局この問題に対する答えは, 次のようになります.

> $f(x,y)$ について,$x^2+y^2=1$ の条件のもとで, 最大値 5 $\left(\sqrt{2}x=y\right)$, 最小値 -1 $\left(x=-\sqrt{2}y\right)$

はい, オシマイです.

恐らく, この種の問題を解くときは, この方法が最もスピーディで確実ではないでしょうか. 踏む手順も少なく抑えられるので, 計算ミスを犯す危険性も最低限に留めることができます. ちなみにこれ,Lagrange の未定乗数法や他の方法でやると, もっと長い時間と手間がかかります.