線形代数学 練習問題 (1)

1. 行列 A の固有値 λ と固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ の定義を述べよ.

2. 行列 A が固有値 λ を持つとき, λ は $\det(A - \lambda E) = 0$ の解であることを示せ.

3. 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを全て求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. 次の行列 B の固有値と固有ベクトルを全て求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

5. 次の行列 C の固有値と固有ベクトルを全て求めよ.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

6. 次の等質連立 1 次方程式が自明解以外の解を持つときの a の値を定めよ.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7. 対角行列

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

について, 次の問に答えよ.

   (a) 行列式 $\det A = a_1 a_2 \cdots a_n$ を示せ.

   (b) A の固有値は $a_1, a_2, \cdots, a_n$ であることを示せ.

8. n を自然数とし, A を n 次の正方行列とする. 次の問に答えよ.

   (a) A が正則行列でないならば, $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となる $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ が存在することを証明せよ.

   (b) $c \in \mathbb{R}$ とする. c が A の固有値である必要十分条件は $\det(cE - A) = 0$ であることを証明せよ. ただし, c が A の固有値であるとは, $A\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{v}$ なる $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ が存在することである. また, $\det A$ によって A の行列式を表し, E は単位行列である.